UNIWERSYTET
WARMIŃSKO-MAZURSKI
W OLSZTYNIE

**Wydział Geoinżynierii**
**Dziedzina nauk inżynieryjno-technicznych**
**Dyscyplina inżynieria lądowa, geodezja i transport**

**mgr inż. Artur Fischer**

# Rozprawa doktorska

**Analiza i doskonalenie algorytmów regularyzacji słabo-uwarunkowanego modelu matematycznego w precyzyjnym pozycjonowaniu techniką satelitarną na podstawie danych z pojedynczej epoki pomiarowej**

**Analysis and improvement of regularization algorithms for an ill-conditioned mathematical model in precise satellite positioning based on single-epoch data set**

**Praca wykonana w Katedrze Geodezji**

Rozprawa doktorska napisana pod kierunkiem naukowym:
Promotor: prof. dr hab. inż. Sławomir Cellmer, Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie
Promotor pomocniczy: dr inż. Krzysztof Nowel, Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie

Olsztyn, 2025

## Wykaz artykułów naukowych wchodzących w skład jednotematycznego cyklu publikacji

Zbiór opublikowanych i powiązanych tematycznie artykułów naukowych stanowiących jednotematyczny cykl publikacji pt. **Analiza i doskonalenie algorytmów regularyzacji słabo-uwarunkowanego modelu matematycznego w precyzyjnym pozycjonowaniu techniką satelitarną na podstawie danych z pojedynczej epoki pomiarowej**. Artykuły naukowe wchodzące w skład jednotematycznego cyklu publikacji:

1. Fischer A., Cellmer S., Nowel K. (2023) *Assessment of the double-parameter iterative Tikhonov regularization for single-epoch measurement model-based precise GNSS positioning*, **Measurement** 218: 113251, doi: 10.1016/j.measurement.2023.113251, IF: 5.2, punkty Ministra ds. nauki: 200

2. Fischer A., Cellmer S., Nowel K. (2024) *The Modified Ambiguity Function Approach with regularization for instantaneous precise GNSS positioning*, **Journal of Applied Geodesy** 19(1): 95–122, doi: 10.1515/jag-2024-0007, IF: 1.2, punkty Ministra ds. nauki: 100

3. Fischer A., Nowel K., Cellmer S. (2025) *The statistical testing of regularized mathematical models in geodetic data processing*, **Journal of Geodesy** 99:14, doi: 10.1007/s00190-025-01934-w, IF: 3.9, punkty Ministra ds. nauki: 140

# Spis treści

**Słownik akronimów** **4**

**Streszczenie w języku polskim** **5**

**Streszczenie w języku angielskim** **6**

**1 Wprowadzenie** **7**
1.1 Model matematyczny . . . 7
1.2 Regularyzacja . . . 10
1.2.1 Aktualny stan wiedzy . . . 10
1.2.2 Regularyzacja modelu matematycznego . . . 12
1.3 Sformułowanie celu oraz hipotezy badań . . . 18

**2 Regularyzacja w pozycjonowaniu satelitarnym** **20**
2.1 Udoskonalenie klasycznej metody regularyzacji . . . 20
2.1.1 Podstawy teoretyczne . . . 21
2.1.2 Opis jakości i ocena skuteczności . . . 24
2.2 Metoda regularyzacji warunkowej . . . 27
2.2.1 MAFA-ILS . . . 29
2.2.2 Regularyzacja warunkowa: podstawy teoretyczne i opis jakości . . . 31
2.2.3 Obszar poszukiwań i ocena skuteczności . . . 34
2.3 Walidacja regularyzowanego modelu matematycznego . . . 40
2.3.1 Przestrzeń rezyduów: źródło problemu . . . 42
2.3.2 Przestrzeń niezamknięć: rozwiązanie problemu . . . 46
2.3.3 Ocena skuteczności . . . 50

**3 Podsumowanie i wnioski** **57**

**4 Omówienie pozostałych osiągnięć naukowych** **61**
4.1 Realizacja projektów naukowych . . . 61
4.2 Współpraca międzynarodowa . . . 61
4.3 Aktywność w organizacjach naukowych . . . 61

**Bibliografia** **62**

**Spis rysunków** **66**

## Słownik akronimów

| | |
|---|---|
| **MSE** | Mean Squared Error (Błąd średniokwadratowy) |
| **LAMBDA** | Least-squares AMBiguity Decorrelation Adjustment (Wyrównanie metodą najmniejszych kwadratów z dekorelacją nieoznaczoności) |
| **MNK** | Metoda Najmniejszych Kwadratów |
| **ILS** | Integer Least Squares (Estymacja całkowitoliczbowa metodą najmniejszych kwadratów) |
| **LS** | Least Squares (Estymacja metodą najmniejszych kwadratów) |
| **BLU** | Best Linear Unbiased (Najlepszy, liniowy, nieobciążony) |
| **MAFA** | Modified Ambiguity Function Approach (Zmodyfikowane podejście do metody funkcji nieoznaczoności) |
| **MAFA-ILS** | Modified Ambiguity Function Approach Integer Least Squares (Zmodyfikowane podejście do metody funkcji nieoznaczoności z wykorzystaniem estymacji całkowitoliczbowej metodą najmniejszych kwadratów) |
| **MNW** | Metoda Największej Wiarygodności |
| **PDOP** | Position Dilution of Precision (Parametr oceny jakości pozycji odbiornika) |
| **GLR** | Generalized Likelihood Ratio (Uogólniony iloraz wiarygodności) |
| **UMPI** | Uniformly Most Powerful Invariant (Jednostajnie najskuteczniejszy test niezmienniczy) |
| **DIA** | Detection-Identification-Adaptation (Detekcja–Identyfikacja–Adaptacja) |
| **PDF** | Probability Density Function (Funkcja gęstości) |

## Streszczenie w języku polskim

W niniejszej rozprawie doktorskiej poddano analizie regularyzację modelu matematycznego w pozycjonowaniu techniką satelitarną. Celem badania była ocena jej skuteczności w uzyskaniu wzrostu prawdopodobieństwa poprawnej estymacji całkowitoliczbowej w natychmiastowym rozwiązaniu nieoznaczoności pomiaru fazowego. Analiza została przeprowadzona zarówno w dziedzinie nieoznaczoności jak i współrzędnych. W dziedzinie nieoznaczoności zaproponowano udoskonalenie klasycznej metody regularyzacji na etapie rozwiązania rzeczywistoliczbowego. Udoskonalenie to polegało na wdrożeniu dwóch różnych parametrów regularyzacji. W wyniku tego, parametry będące przedmiotem zainteresowania w modelu zostały poddane niezależnej regularyzacji przez dedykowane im parametry regularyzacji. Natomiast w dziedzinie współrzędnych zaproponowano rozwiązanie problemu dokładnej definicji obszaru poszukiwań w metodzie MAFA-ILS. Rozwiązanie problemu polegało na zaproponowaniu regularyzacji warunkowej na etapie rozwiązania rzeczywistoliczbowego. W wyniku tego, został zdefiniowany regularyzowany obszar poszukiwań. Dzięki regularyzacji modelu matematycznego zaobserwowano wzrost prawdopodobieństwa poprawnej estymacji całkowitoliczbowej - zarówno w dziedzinie nieoznaczoności jak i współrzędnych - przy jednoczesnej optymalizacji procedury poszukiwania rozwiązania całkowitoliczbowego. Niemniej jednak, koszt wynikający z zastosowania regularyzacji stanowił problem w walidacji modelu matematycznego. Problem ten został jednak rozwiązany poprzez zastąpienie parametrycznej reprezentacji modelu reprezentacją niejawną, która jest równoważna mimo, że nie zawiera parametrów będących przedmiotem zainteresowania. W związku z tym, został wyeliminowany całkowity koszt wynikający z zastosowania regularyzacji, oferując ścisły aparat matematyczny podczas walidacji modelu. Walidacja regularyzowanego modelu matematycznego stanowiła kluczową część niniejszej pracy doktorskiej.

**Słowa kluczowe**: GNSS, model matematyczny, regularyzacja, estymacja całkowitoliczbowa nieoznaczoności pomiaru fazowego, walidacja modelu

## Streszczenie w języku angielskim

In this doctoral dissertation, the regularization of the mathematical model was analyzed with the aim of increasing the probability of correct integer estimation in instantaneous carrier phase ambiguity resolution. The analysis was carried out in both the ambiguity and coordinate domains. In the ambiguity domain, an enhancement to the classical regularization method was introduced at the real-valued solution stage. This enhancement involved the use of two distinct regularization parameters, enabling independent regularization of the model parameters of interest. In the coordinate domain, a solution was proposed to the problem of defining the search region in the MAFA-ILS method. This was achieved by introducing conditional regularization at the real-valued solution stage, resulting in an accurately defined, regularized search region. As a consequence of model regularization, an increased probability of correct integer estimation was observed in both domains, along with an optimization of the integer search procedure. However, the introduction of regularization incurred a cost that complicated the model validation procedure. This issue was resolved by replacing the parametric representation of the model with an equivalent implicit form, which - although it omits the parameters of interest - retains full model equivalence. Consequently, the cost associated with regularization was fully eliminated, enabling a rigorous mathematical framework for model validation. The validation of the regularized mathematical model constituted a central problem of this doctoral dissertation.

**Key words**: GNSS, mathematical model, regularization, integer ambiguity estimation, model validation

# 1 Wprowadzenie

W niniejszym rozdziale zostanie zaprezentowany aparat matematyczny modelu GNSS, stanowiącego podstawę do analizy algorytmów regularyzacji. Kolejno, zostanie przeprowadzony przegląd podstaw teoretycznych regularyzacji wraz z jej założeniami, a także zostanie omówiona regularyzacja modelu matematycznego. Następnie, zostaną sformułowane cel oraz hipoteza badań.

## 1.1 Model matematyczny

Punktem wyjścia są nieliniowe równania podwójnie zróżnicowanej obserwacji fazowej oraz kodowej dla częstotliwości $f$ danej konstelacji GNSS satelitów $S$ (Verhagen 2005, podrozdz. 2.3.3; Hofmann-Wellenhof i in. 2008, podrozdz. 6.3)

$$\begin{aligned} \Phi^{st}_{pr,f} &= \rho^{st}_{pr}\left(\mathbf{x}_r\right) + \lambda_f a^{st}_{pr,f} + \epsilon^{st}_{pr,f_\Phi} \\ p^{st}_{pr,f} &= \rho^{st}_{pr}\left(\mathbf{x}_r\right) + \epsilon^{st}_{pr,f_p} \end{aligned} \tag{1}$$

gdzie $\Phi^{st}_{pr,f}$ oraz $p^{st}_{pr,f}$ są odpowiednio podwójnie zróżnicowaną obserwacją fazową (ang. *DD carrier phase*) wyrażoną w metrach oraz kodową pseudoodległością (ang. *DD code pseudorange*) również wyrażoną w metrach, $\rho^{st}_{pr}(\mathbf{x}_r)$ jest podwójnie zróżnicowaną odległością geometryczną zależną od wektora nieznanych współrzędnych pozycji (anteny) odbiornika użytkownika $\mathbf{x}_r$, $\lambda_f$ jest długością fali sygnału na częstotliwości $f$, $a^{st}_{pr,f}$ jest nieznaną podwójnie zróżnicowaną całkowitą liczbą cykli pomiaru fazowego (nieoznaczoność), z kolei $\epsilon^{st}_{pr,f_\Phi}$ oraz $\epsilon^{st}_{pr,f_p}$ są odpowiednio podwójnie zróżnicowanym losowym szumem obserwacji fazowej oraz kodowej. Zgodnie z literaturą przedmiotu, precyzja pomiaru fazy fali nośnej jest na poziomie milimetrów (1% długości fali sygnału), podczas gdy kodowej pseudoodległości osiąga rząd dziesiątek centymetrów (Xu 2007, podrozdz. 4.1 i 4.2). Powyższe równania podwójnie zróżnicowanej obserwacji fazowej oraz kodowej zostały sformułowane przy założeniu, że dwa odbiorniki, $r$ (odbiornik użytkownika) oraz $p$ (odbiornika referencyjny zlokalizowany na punkcie o znanych współrzędnych), jednocześnie obserwują tych samych dwóch satelitów, $s$ oraz $t$. Z uwagi na modelowanie obserwacji z pojedynczej epoki pomiarowej, indeks identyfikujący równania obserwacyjne danej epoki został pominięty. Odnosząc się z kolei do kontroli błędów obserwacji GNSS, wyróżnia się następujące podejścia: (i) eliminacja błędów, (ii) modelowanie błędów, (iii) estymacja błędów, oraz (iv) pominięcie błędów jeżeli pozwala na to środowisko pomiarowe (Bisnath 2021, podrozdz. 19.2.3). Mając zatem na uwadze równania podwójnie zróżnicowanej obserwacji fazowej oraz kodowej (por. (1)), błędy zegarów satelitów oraz błąd zegara odbiornika nie podlegają parametryzacji w pozycjonowaniu względnym. Zgodnie z podejściem przedstawionym przez Bosego (2005), ich wpływ na obserwacje został wyeliminowany (i) - w istocie ograniczony - poprzez sformułowanie odpowiednio pojedynczej oraz podwójnej różnicy obserwacji (Bosy 2005, podrozdz. 3.2). Założenie (i) jest również słuszne w przypadku opóźnień sprzętowych satelitów oraz odbiornika. Dotyczy to również błędów wynikających zarówno z modelowania orbit satelitów, jak i z mimośrodów centrów fazowych anten satelitów oraz anteny odbiornika (Bisnath 2021, podrozdz. 19.2.3). Kontynuując odniesie-

nia do literatury przedmiotu, błędy obserwacji wynikające z opóźnień atmosferycznych, tj. opóźnienie troposferyczne oraz jonosferyczne, mogą nie podlegać parametryzacji (iv) w przypadku zachowania odległości między dwoma odbiornikami mniejszej niż 10 km (Odijk 2017, podrozdz. 21.4.1). Podczas formułowania analogicznych równań (por. (1)) dla wszystkich satelitów z konstelacji $S$ przyjmujemy, że $s$ oznacza satelitę referencyjnego, a $t_i$, $i = \{1, \ldots, l\}$, oznacza pozostałe satelity z zastrzeżeniem, że $\forall i, t_i \neq s$. Równania te uwzględniają wyłącznie satelity jednocześnie widoczne dla obu odbiorników, $r$ oraz $p$. W rezultacie, powstaje układ równań opisujący podwójnie zróżnicowane obserwacje fazowe oraz kodowe dla częstotliwości $f$ w zapisie wektorowym (Bosy 2005, rw. 3.12; Hofmann-Wellenhof i in. 2008, rw. 6.43-6.48)

$$\begin{aligned} \mathbf{\Phi} &= \boldsymbol{\rho}\left(\mathbf{x}_r\right) + \lambda_f \mathbf{a} + \boldsymbol{\epsilon}_\Phi \\ \mathbf{p} &= \boldsymbol{\rho}\left(\mathbf{x}_r\right) + \boldsymbol{\epsilon}_p \end{aligned} \tag{2}$$

gdzie $\mathbf{\Phi} = [\Phi_{pr,f}^{st_1} \ \ldots \ \Phi_{pr,f}^{st_l}]^T$ oraz $\mathbf{p} = [p_{pr,f}^{st_1} \ \ldots \ p_{pr,f}^{st_l}]^T$ są wektorami odpowiednio podwójnie zróżnicowanych obserwacji fazowych oraz kodowych, $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_r) = [\rho_{pr}^{st_1}(\mathbf{x}_r) \ \ldots \ \rho_{pr}^{st_l}(\mathbf{x}_r)]^T$ jest wektorem podwójnie zróżnicowanych odległości geometrycznych zależnych od $\mathbf{x}_r$, $\mathbf{a} = [a_{pr,f}^{st_1} \ \ldots \ a_{pr,f}^{st_l}]^T$ jest wektorem nieznanych podwójnie zróżnicowanych całkowitoliczbowych nieoznaczoności pomiaru fazowego, z kolei $\boldsymbol{\epsilon}_\Phi = [\epsilon_{pr,f_\Phi}^{st_1} \ \ldots \ \epsilon_{pr,f_\Phi}^{st_l}]^T$ oraz $\boldsymbol{\epsilon}_p = [\epsilon_{pr,f_p}^{st_1} \ \ldots \ \epsilon_{pr,f_p}^{st_l}]^T$ są wektorami odpowiednio podwójnie zróżnicowanych losowych szumów obserwacji fazowych oraz kodowych. Całkowita liczba podwójnie zróżnicowanych obserwacji fazowych ($l$) oraz kodowych ($l$) w modelu obserwacji pojedynczej epoki pomiarowej jest równa $m = 2l$.

Linearyzacja układu równań (2) względem nieznanych parametrów, a w istocie $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_r)$ względem $\mathbf{x}_r$, pozwala na sformułowanie wyjściowego modelu matematycznego. Model ten składa się odpowiednio z modelu funkcjonalnego oraz stochastycznego (Khodabandeh i Teunissen 2024, rw. 1; Massawareh i in. 2025, rw. 1)

$$\mathrm{E}\left(\underline{\mathbf{y}}\right) = \mathbf{A}\mathbf{a} + \mathbf{B}\mathbf{b}, \quad \mathrm{D}\left(\underline{\mathbf{y}}\right) = \mathbf{Q}_{yy} \tag{3}$$

gdzie $\underline{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^m$ jest wektorem wyrazów wolnych, tj. różnicy wielkości *obserwowanych* i *obliczonych* (ang. *observed-minus-computed*), $\underline{\mathbf{y}} = \underline{\mathbf{y}}^o - \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_{r_0})$. Ściślej rzecz ujmując, wektor wielkości obserwowanych $\underline{\mathbf{y}}^o$ z układu równań (2) został skorygowany o wektor aproksymowanych podwójnie zróżnicowanych odległości geometrycznych $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_{r_0})$. Poszczególne wartości $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_{r_0})$ zostały obliczone w oparciu o przybliżone współrzędne pozycji odbiornika użytkownika $\mathbf{x}_{r_0}$. Jest to wynikiem wcześniejszej linearyzacji podwójnie zróżnicowanych odległości geometrycznych w układzie równań (2) (Wiśniewski 2016, podrozdz. 4.1.2). Nieznane współrzędne pozycji odbiornika użytkownika pozostawały pierwotnie w nieliniowej relacji z podwójnie zróżnicowanymi obserwacjami. Macierze modelowe $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ oraz $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ są znanymi pełnego rzędu macierzami współczynników, $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = n$ oraz $\mathrm{rank}(\mathbf{B}) = p$, gdzie $\mathrm{rank}(\cdot)$ zwraca rząd macierzy. Z kolei wektory $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n$ oraz $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^p$ są wektorami odpowiednio nieznanych parametrów całkowitoliczbowych oraz rzeczywistoliczbowych. Precyzując, wektor parametrów $\mathbf{a}$ zawiera $n$ nieznanych podwójnie

zróżnicowanych nieoznaczoności pomiaru fazowego. Wektor parametrów $\mathbf{b}$ obejmuje natomiast pozostałe $p$ nieznane rzeczywistoliczbowe parametry, tj. przyrosty do współrzędnych pozycji przybliżonej odbiornika użytkownika w liczbie $p$=3. Z kolei, $\mathbb{Z}^n$ oraz $\mathbb{R}^p$ definiują odpowiednio zbiory całkowitoliczbowe oraz rzeczywistoliczbowe parametrów będących przedmiotem zainteresowania w modelu (3). Przy założeniu, że $\mathrm{E}(\underline{\epsilon}) = \mathbf{0}$, gdzie $\underline{\epsilon} \in \mathbb{R}^m$ jest wektorem podwójnie zróżnicowanych losowych szumów obserwacji fazowych oraz kodowych z (2), został skonstruowany model funkcjonalny (por. (2)). Nadliczbowość w modelu funkcjonalnym jest równa $r = m - n - p$. Model stochastyczny został natomiast skonstruowany w oparciu o dodatnio określoną macierz kowariancji podwójnie zróżnicowanych obserwacji fazowych oraz kodowych $\mathbf{Q}_{yy} \in \mathbb{R}^{m \times m}$. W dalszej części autoreferatu zostanie omówiona jego postać.

Jednym z kluczowych efektów procesu różnicowania obserwacji jest niewątpliwie uzyskanie równań obserwacji fazowych (por. (2)), w których wyraźnie uwidacznia się całkowitoliczbowy charakter nieoznaczoności pomiaru fazowego. Kolejnym efektem jest także redukcja wpływu na obserwacje, m.in. błędów zegarów satelitów oraz błędu zegara odbiornika czy opóźnień sprzętowych satelitów oraz odbiornika. Jednakże proces różnicowania obserwacji powoduje, że wielkość losowego szumu obserwacji fazowych oraz kodowych wzrasta. Sytuacja ta ma miejsce, ponieważ przenoszony jest kolejno z oryginalnej postaci obserwacji na ich pojedynczą a następnie podwójną różnicę. Kolejną konsekwencją tego procesu jest wystąpienie matematycznej korelacji między podwójnie zróżnicowanymi obserwacjami fazowymi. Dotyczy to również podwójnie zróżnicowanych obserwacji kodowych. W związku z tym, istotne jest uwzględnienie wzrostu wielkości losowego szumu, a także korelacji, podczas formułowania modelu stochastycznego (por. (3)). Model stochastyczny (Blewitt 1997, podrozdz. 6.3; Leick i in. 2015, podrozdz. 2.2), nazywany także modelem statystycznym (Wiśniewski 2016, podrozdz. 4.1.1), reprezentowany jest przez macierz kowariancji podwójnie zróżnicowanych obserwacji. Powołując się zatem na literaturę przedmiotu, dodatnio określona macierz kowariancji podwójnie zróżnicowanych obserwacji fazowych oraz kodowych ma następującą postać (Blewitt 1997, podrozdz. 6.3.2; Hofmann-Wellenhof i in. 2008, rw. 6.72-6.79)

$$\mathrm{E}\left(\underline{\epsilon}\underline{\epsilon}^T\right) = \mathbf{Q}_{yy} = \sigma_0^2 \mathbf{Q} = \sigma_0^2 \mathbf{D} \mathbf{Q}_0 \mathbf{D}^T \tag{4}$$

gdzie $\sigma_0^2$ jest współczynnikiem wariancji, natomiast $\mathbf{Q}$ jest macierzą kofaktorów. Macierz $\mathbf{D}$ transformuje oryginalną macierz kofaktorów $\mathbf{Q}_0$ do postaci odzwierciedlającej stochastyczne właściwości obserwacji podwójnie zróżnicowanych. W praktyce, na ogół, jako kofaktory przyjmuje się kwadraty błędów średnich pomiaru *a priori* (Wiśniewski 2016, podrozdz. 3.2.1).

Model matematyczny (3) z uwzględnieniem, że $\underline{\epsilon} \in \mathbb{R}^m$ jest o $m$-wymiarowym rozkładzie normalnym prawdopodobieństwa z $\mathrm{E}(\underline{\epsilon}) = \mathbf{0}$ oraz $\mathrm{E}(\underline{\epsilon}\underline{\epsilon}^T) = \mathbf{Q}_{yy}$, można zapisać w postaci

$$\underline{\mathbf{y}} \sim \mathcal{N}_m\left(\mathbf{A}\mathbf{a} + \mathbf{B}\mathbf{b}, \mathbf{Q}_{yy}\right), \quad \mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^p \tag{5}$$

gdzie $\sim$ oznacza rozkład prawdopodobieństwa, a w tym przypadku $m$-wymiarowy rozkład

normalny $\mathcal{N}_m$ prawdopodobieństwa $\underline{\mathbf{y}}$. Odwołując się do literatury przedmiotu, model (5) nazywany jest modelem całkowito-rzeczywistoliczbowym (ang. *mixed-integer GNSS model*) (Teunissen 2017, rw. 23.2). Należy mieć na uwadze, że w kontekście teorii testowania hipotez statystycznych model (5) nazywany jest modelem roboczym (ang. *working model*), a zatem wyjściowym dla opracowania zbioru obserwacji w przypadku *normalnych warunków obserwacyjnych* (Wasserman 2004, podrozdz. 6.3.3; Zaminpardaz i Teunissen 2023, rozdz. 1). Jednak w przypadku występowania błędów grubych w zbiorze obserwacji, wynikających między innymi z nieuwzględnionych opóźnień atmosferycznych, błędów orbit satelitów, wielotorowości czy innych błędów systematycznych, zasadność opracowania zbioru obserwacji na podstawie modelu (3) może zostać zakwestionowana. W takiej sytuacji należy sformułować alternatywne modele, w których parametryzowane są obserwacje odstające (Teunissen 2024b, rozdz. 2-3; Yin i in. 2025, rozdz. 2). Należy zatem podkreślić, że walidacja modelu matematycznego, na przykład stosując testowanie hipotez statystycznych, stanowi niezbędny etap poprzedzający estymację parametrów. Błąd gruby oraz obserwacja odstająca są definiowane zgodnie z definicjami przedstawionymi we *Wprowadzeniu* do pracy Lehmanna (2013). Więcej informacji na temat formułowania modeli matematycznych oraz ich późniejszej walidacji znajduje się w podrozdz. 2.3. W podrozdz. 2.1 oraz 2.2 punktem wyjścia do rozważań pozostaje jednak model przedstawiony w (3).

Metoda precyzyjnego pozycjonowania względnego, oparta na przedstawionym modelu obserwacji podwójnie zróżnicowanych, może stanowić punkt wyjścia dla techniki satelitarnej RTK w przypadku krótkich wektorów (Goad 1998, rozdz. 11; El-Rabbany 2002, podrozdz. 5.6; Leick i in. 2015, rozdz. 7; Odijk 2017, podrozdz. 21.6; Bisnath 2021, podrozdz. 19.3). W związku z tym, natychmiastowe rozwiązanie całkowitoliczbowych nieoznaczoności pomiaru fazowego (ang. *ambiguity resolution*) stanowi kluczowy etap, od którego poprawności zależy precyzyjne pozycjonowanie. Całkowitoliczbowe nieoznaczoności pomiaru fazowego stanowią zatem fundamentalny element modelu matematycznego (3). W celu uzyskania wzrostu prawdopodobieństwa poprawnego rozwiązania całkowitoliczbowych nieoznaczoności pomiaru fazowego, analizie zostanie poddana regularyzacja modelu (3). Następnie, zostanie przeprowadzona szczegółowa analiza walidacji regularyzowanego modelu matematycznego, co stanowi kluczową część niniejszej pracy doktorskiej.

## 1.2 Regularyzacja

W tym podrozdziale zostanie przeprowadzony przegląd podstaw teoretycznych regularyzacji wraz z jej założeniami. Następnie, zostanie omówiona regularyzacja modelu matematycznego.

### 1.2.1 Aktualny stan wiedzy

Regularyzacja została opracowana jako metoda rozwiązywania problemów źle określonych (ang. *ill-posed problems*) w modelowaniu matematycznym. Zgodnie z literaturą przedmiotu oraz na przykładzie modelu (3), problem definiuje się jako źle określony jeśli nie jest spełniony jakikolwiek z następujących warunków: (i) dla każdej realizacji wielkości obserwowanej w przestrzeni $\mathbb{R}^m$ istnieje rozwiązanie w postaci realizacji parametrów w przestrzeni

$\mathbb{R}^n$ (ang. *existence*), (ii) rozwiązanie jest unikalne (ang. *uniqueness*), (iii) rozwiązanie jest stabilne (ang. *stability*) (Tikhonov i Arsenin 1977, ss. 7-8). Spełnienie warunków (i-iii) definiuje problem dobrze określony (ang. *well-posed problem*), którego koncepcję opracował Hadamard (1932, rozdz. 1).

Za twórcę regularyzacji powszechnie uznaje się matematyka Andreya Tikhonova (Tikhonov 1963a; Tikhonov 1963b; Tikhonov i Arsenin 1977; Tikhonov i in. 1995). Pionierskie prace na temat aparatu matematycznego regularyzacji powstawały w drugiej połowie XX wieku. Sama idea regularyzacji wywodzi się jednak z lat 40 XX wieku, kiedy Tikhonov opublikował pracę pt. *The stability of inverse problems*. Odnosząc się do monografii z 1977 r., regularyzację można zdefiniować w sposób techniczny jako wprowadzenie dodatkowych, deterministycznych informacji do modelu matematycznego. Informacje te dotyczą rozwiązań parametrów będących przedmiotem zainteresowania w danym modelu. Celem wprowadzenia dodatkowych informacji jest między innymi stabilizacja - a tym samym poprawa jakości - szacowanych realizacji parametrów (Tikhonov i Arsenin 1977, s. 9). Tikhonov i Arsenin rozróżniają dwa rodzaje - w istocie dwie natury - dodatkowych informacji: ilościowe i jakościowe (ibid.). Regularyzacja Tikhonova jest metodą o naturze jakościowej i sprowadza się do znalezienia: a) operatora regularyzacji oraz b) parametru regularyzacji z macierzą regularyzacji. Ściślej rzecz ujmując, a) może odnosić się do samego *mechanizmu* regularyzacji, czyli sposobu wprowadzania dodatkowych informacji do modelu matematycznego, na przykład w postaci normy L2, oraz tego, w jaki sposób *mechanizm* ten kontroluje *intensywność* wpływu regularyzacji na poszczególne parametry modelu. Natomiast b) jest rozmiarem *intensywności* regularyzacji. Parametr regularyzacji może zostać wyznaczony w oparciu o dodatkowe informacje odnoszące się do charakterystyki modelu matematycznego, na przykład do rozmiaru błędów średnich *a priori* (Tikhonov i Arsenin 1977, s. 48).

W drugiej połowie XX wieku zostały opracowane alternatywne metody do regularyzacji Tikhonova w celu stabilizacji rozwiązań parametrów modelu. Hoerl i Kennard (1970) opracowali regresję liniową z regularyzacją, której aparat matematyczny jest równoważny temu z regularyzacji Tikhonova. Kolejno, zaprojektowano metodę opartą na *obciętej* dekompozycji według wartości osobliwych (ang. *Truncated Singular Value Decomposition*) oraz przygotowno jej uogólnienie (Lawless i Wang 1976; Hansen 1990; Hansen 1992; Xu 1998). Dodatkowo, można także przytoczyć metodę analizy głównych składowych (ang. *Principal Component Analysis*), opracowanej w duchu regularyzacji. W kręgu alternatywnych metod można zarówno wyróżnić wnioskowanie bayesowskie (Berger 1985) oraz stochastyczne (Rummel i in. 1979; Moritz 1980) (ang. *Bayesian and stochastic inferences*), jak również estymatory z nałożonymi na nie warunkami (ang. *constrained estimators*) (Backus 1988).

Punktem krytycznym regularyzacji Tikhonova jest wyznaczenie parametru regularyzacji. Dotychczas wykorzystywano podejście oparte na jednym parametrze regularyzacji (Tikhonov 1963a; Tikhonov 1963b) lub wielu (Hoerl i Kennard 1970; Hemmerle 1975; Hemmerle i Brantle 1978; Xu i in. 2006a). Metodami stosowanymi do wyznaczenia parametru regularyzacji jest kryterium MSE (Hoerl i Kennard 1970), kryterium krzywej L (Hansen

i O'Leary 1993), czy uogólniona walidacja krzyżowa (ang. *Generalized Cross Validation*) (Golub i in. 1979). W kontekście metod stosowanych do wyznaczenia wielu parametrów regularyzacji, gdzie każdemu parametrowi odpowiada zdefiniowana macierz regularyzacji, można wyróżnić metodę krzywej L, zasadę rozbieżności (Wang 2012) czy metodę uogólnionej regresji liniowej (ang. *Generalized Ridge Regression*) z kryterium MSE (Hemmerle 1975; Hemmerle i Brantle 1978; Xu i in. 2006a; Yu i in. 2024).

Regularyzacja Tikhonova jest niewątpliwie uniwersalną metodą o charakterze interdyscyplinarnym, która znalazła zastosowanie w wielu dziedzinach. Ograniczając się natomiast do geodezji, regularyzacja jest powszechnie wykorzystywana w grawimetrii (Xu i Rummel 1994; Xu 1998; Koch i Kusche 2002; Kusche i Klees 2002; Xu 2009; Shen i in. 2012; Ji i in. 2022; Yu i in. 2024). W mniejszym stopniu znalazła również zastosowanie w pozycjonowaniu techniką satelitarną, w szczególności na etapie rozwiązania rzeczywistoliczbowego, które poprzedza rozwiązanie całkowitoliczbowych nieoznaczoności pomiaru fazowego (Gui i Han 2007; Shen i Li 2007; Luo i in. 2008; Li 2009; Li i in. 2010; Wu i Bian 2022). Na przykład, Gui i Han (2007) udoskonalili metodę LAMBDA zastępując oryginalną macierz kowariancji z MNK regularyzowaną macierzą kowariancji. Celem było zapewnienie wzrostu prawdopodobieństwa poprawnej estymacji całkowitoliczbowej w dziedzinie nieoznaczoności. Podobnie jak w pracy Gui i Han (2007), udoskonalenie klasycznej metody regularyzacji zaproponowane przez Fischer i in. (2023) opiera się na dwóch parametrach regularyzacji. Niemniej jednak, zarówno procedura ich wyznaczania, jak i sam algorytm estymacji parametrów stanowią odmienną propozycję, co zostało wyraźnie podkreślone w pracy Fischer i in. Aparat matematyczny regularyzacji został również poddany analizie pod kątem poprawy wydajności numerycznej procedury rozwiązania całkowitoliczbowych nieoznaczoności (Shen i Li 2007). Li i in. (2010) zaproponowali z kolei regularyzowaną postać rozwiązania rzeczywistoliczbowego stosując jednoparametrową regularyzację nieoznaczoności lub współrzędnych pozycji odbiornika. Ocena skuteczności polegała na analizie wzrostu prawdopodobieństwa poprawnej estymacji całkowitoliczbowej w dziedzinie nieoznaczoności. W pracy Wu i Bian (2022) zostało również zaproponowane oryginalne podejście do jednoparametrowej regularyzacji na etapie rozwiązania rzeczywistoliczbowego. Ocena skuteczności polegała na analizie wzrostu prawdopodobieństwa poprawnej estymacji całkowitoliczbowej w dziedzinie nieoznaczoności.

Odnosząc się do aktualnego stanu wiedzy oraz dostępnej literatury przedmiotu, nie przeprowadzono jak dotąd wyczerpującej analizy regularyzacji oraz oceny jej skuteczności w natychmiastowym rozwiązaniu całkowitoliczbowych nieoznaczoności pomiaru fazowego, tj. na podstawie danych z pojedynczej epoki pomiarowej. Ponadto, nie zaproponowano również ścisłego aparatu matematycznego, który umożliwiłby walidację regularyzowanego modelu (Li i in. 2021). Rozwiązanie problemu walidacji regularyzowanego modelu matematycznego stanowi niewątpliwie kluczową część niniejszej pracy doktorskiej.

### 1.2.2 Regularyzacja modelu matematycznego

Na podstawie pracy Tikhonova i Arsenina (1977, ss. 7-9) można rozważyć, że w zadaniu opracowania jednoepokowego zbioru obserwacji z wykorzystaniem modelu (3) warunek

(iii) pozostanie niespełniony. W takim przypadku literatura przedmiotu wskazuje, że nawet niewielkie zmiany lub zaburzenia w zbiorze obserwacji mogą prowadzić do znaczących błędów szacowanych realizacji parametrów (Tikhonov i Arsenin 1977, s. 8). Innymi słowy, jakość szacowanych realizacji parametrów może nie spełniać wymagań wysokiej precyzji, na przykład w zastosowaniu pozycjonowania techniką satelitarną. Niespełnienie warunku (iii) wiąże się zatem z tym, że model matematyczny jest słabo-uwarunkowany (Belsley 1980, s. 101). Punktem odniesienia jest natomiast zadanie z dobrze uwarunkowanym modelem, w którym opracowaniu podlega wieloepokowy zbiór obserwacji. Podobne rozważania w oparciu o model (3) prowadzono w pracach Li i in. (2010) oraz Wu i Bian (2022)

Miarą uwarunkowania jest liczba warunkowa (ang. *condition number*) macierzy modelowej lub macierzy równań normalnych w MNK (Wilkinson 1965). Definiowana jest jako miara wrażliwości rozwiązań parametrów modelu na zmiany lub zaburzenia w zbiorze obserwacji (Belsley 1980, ss. 101-103). Jak podkreśla Belsley (1980, ibid.), im wyższa wartość liczby warunkowej tym gorsze jest uwarunkowanie modelu. Według Belseya uwarunkowanie zaczyna się zauważalnie pogarszać w momencie, gdy liczba warunkowa osiąga wartości powyżej 30. Równocześnie podkreśla, że jest to kwestia, którą należy ustalić empirycznie (Belsley 1980, s. 105). Można zatem wywnioskować, że ustalenie granicy pomiędzy dobrym a słabym uwarunkowaniem modelu zależy od użytkownika oraz wymagań opisu jakości, jakie narzuca konkretne zastosowanie, na przykład pozycjonowania techniką satelitarną.

Uwarunkowanie modelu (3) w zadaniu jednoepokowym można rozważyć w kontekście geometrycznym oraz matematycznym. Punktem odniesienia jest natomiast zadanie wieloepokowe. W kontekście geometrycznym, konstrukcja pozycjonowania jednoepokowego jest zauważalnie słabsza. Taki stan rzeczy wynika z tego, że geometryczna konstrukcja pozycjonowania jednoepokowego nie zmienia się w czasie - jest stała. W kontekście matematycznym, liczba obserwacji nadliczbowych w zadaniu jednoepokowym jest zauważalnie niższa. Warto jednak podkreślić brak wysokiej jakości nadliczbowych obserwacji fazowych. Wynika to z tego, że włączenie każdej kolejnej obserwacji fazowej do zbioru obserwacji wiąże się z potrzebą parametryzacji kolejnej nieznanej całkowitoliczbowej nieoznaczoności pomiaru fazowego. Stanowi to w istocie konsekwencję braku zmiany w czasie geometrycznej konstrukcji pozycjonowania. W związku z tym, obserwacje kodowej pseudoodległości o niższej jakości stanowią jedyne dostępne obserwacje nadliczbowe. Ponadto, w kontekście geometrycznym, obserwacje kodowe pochodzą od tych samych satelitów co obserwacje fazowe. Nie poprawiają zatem geometrycznej konstrukcji pozycjonowania czy rozmieszczenia obserwacji nadliczbowych w tej konstrukcji. Gwarantują natomiast nadliczbowość w modelu (3). Odnosząc się do teorii niezawodności (ang. *reliability theory*), nadliczbowość obserwacji jest konieczna w celu wykrycia błędów grubych w zbiorze obserwacji. Zgodnie z Prószyńskim i Kwaśniakiem (2002, podrozdz. 1.4), wraz ze wzrostem nadliczbowości wzrastają szanse na wykrycie błędów grubych pod warunkiem, że obserwacje nadliczbowe są równomiernie rozłożone w geometrii pozycjonowania. Struktura geometrii pozycjonowania wpływa natomiast na identyfikację błędów grubych (Zaminpardaz i Teunissen 2019, podrozdz. 3.3 i 5.3). W związku z tym, szanse na wykrycie błędów grubych zmniejszają się w zadaniu jednoepokowym powodując, że walidacja modelu (3) jest utrudniona. Zgodnie z

teorią niezawodności można zatem rozważyć, że w zadaniu jednoepokowym model (3) jest słabo-uwarunkowany. W takim przypadku, zasadne jest dokonanie analizy regularyzacji modelu (3).

**Klasyczny model matematyczny**

Stosując estymację parametrów MNK w modelu (3), jednakże z uwzględnieniem całkowitoliczbowej natury nieoznaczoności pomiaru fazowego, otrzymujemy (Teunissen 2017, rw. 23.50)

$$\left(\check{\underline{\mathbf{a}}}, \check{\underline{\mathbf{b}}}\right) = \arg \min_{a \in \mathbb{Z}^n,\, b \in \mathbb{R}^p} \left\| \underline{\mathbf{y}} - \mathbf{A}\mathbf{a} - \mathbf{B}\mathbf{b} \right\|^2_{Q_{yy}} \tag{6}$$

gdzie $\check{\underline{\mathbf{a}}} \in \mathbb{Z}^n$ oraz $\check{\underline{\mathbf{b}}} \in \mathbb{R}^p$ są estymatorami odpowiednio $\mathbf{a}$ oraz $\mathbf{b}$, tzw. (ang. *integer and fixed solutions*). Aby rozwiązać (6) z uwzględnieniem, że estymator $\check{\underline{\mathbf{a}}}$ jest estymatorem całkowitoliczbowym MNK (ang. *ILS estimator*), zostaje przeprowadzona ortogonalna dekompozycja kryterium (6) (Teunissen 1998, rw. 8.7)

$$||\underline{\mathbf{y}} - \mathbf{A}\mathbf{a} - \mathbf{B}\mathbf{b}||^2_{Q_{yy}} = ||\underline{\mathbf{y}} - \mathbf{A}\hat{\underline{\mathbf{a}}} - \mathbf{B}\hat{\underline{\mathbf{b}}}||^2_{Q_{yy}} + ||\hat{\underline{\mathbf{a}}} - \mathbf{a}||^2_{Q_{\hat{a}\hat{a}}} + ||\hat{\underline{\mathbf{b}}}\,(\mathbf{a}) - \mathbf{b}||^2_{Q_{\hat{b}(a)\hat{b}(a)}} \tag{7}$$

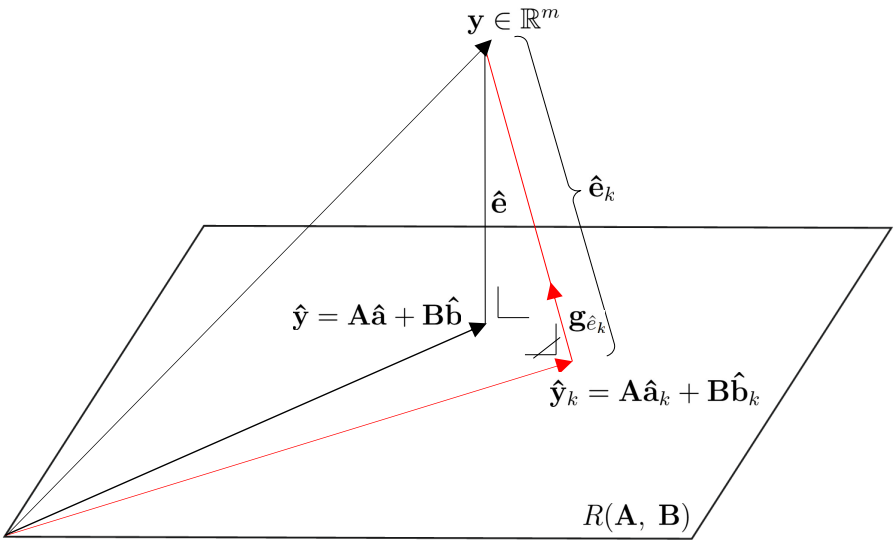
gdzie $\hat{\underline{\mathbf{a}}} \in \mathbb{R}^n$ oraz $\hat{\underline{\mathbf{b}}} \in \mathbb{R}^p$ są estymatorami MNK odpowiednio $\mathbf{a}$ oraz $\mathbf{b}$ (ang. *unconstrained LS estimators*) w modelu (3), tzw. (ang. *float solutions*). Jakość $\hat{\underline{\mathbf{a}}}$ oraz $\hat{\underline{\mathbf{b}}}$ jest oceniana na podstawie ich macierzy wariancyjno-kowariancyjnych $\mathbf{Q}_{\hat{a}\hat{a}}$ oraz $\mathbf{Q}_{\hat{b}\hat{b}}$ - nazywanych dalej macierzami kowariancji. W pierwszym kryterium rozwinięcia w (7) porzuca się zatem całkowitoliczbowe ograniczenia $\mathbf{a}$, tj. $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, implikując, że estymator $\hat{\underline{\mathbf{b}}}$ nie jest uwarunkowany na estymatorze całkowitoliczbowym $\check{\underline{\mathbf{a}}}$. Drugie kryterium dotyczy natomiast fundamentalnego etapu związanego z estymacją całkowitoliczbową nieoznaczoności pomiaru fazowego (*ang. integer ambiguity estimation*), której rozwiązanie (*ang. integer solution*) zapewnia następujący estymator MNK (Teunissen 2017, rw. 23.52)

$$\check{\underline{\mathbf{a}}} = \arg \min_{z \in \mathbb{Z}^n} ||\hat{\underline{\mathbf{a}}} - \mathbf{z}||^2_{Q_{\hat{a}\hat{a}}}. \tag{8}$$

Estymator $\hat{\underline{\mathbf{b}}}$ zostaje kolejno uwarunkowany na estymatorze całkowitoliczbowym $\check{\underline{\mathbf{a}}}$ z (8), tzw. (ang. *fixed solution*) (Teunissen 2017, rw. 23.52)

$$\check{\underline{\mathbf{b}}} = \hat{\underline{\mathbf{b}}}\,(\check{\underline{\mathbf{a}}}) = \hat{\underline{\mathbf{b}}} - \mathbf{Q}_{\hat{b}\hat{a}}\mathbf{Q}^{-1}_{\hat{a}\hat{a}}\,(\hat{\underline{\mathbf{a}}} - \check{\underline{\mathbf{a}}}) \tag{9}$$

gdzie $\mathbf{Q}_{\hat{b}\hat{a}}$ jest macierzą zawierającą kowariancje. Jakość $\hat{\underline{\mathbf{b}}}(\mathbf{a})$ jest oceniana za pomocą $\mathbf{Q}_{\hat{b}(a)\hat{b}(a)}$. Uzyskanie rozwiązania precyzyjnego (ang. *precise solution*) w (9) ściśle zależy od poprawności rozwiązania całkowitoliczbowych nieoznaczoności pomiaru fazowego $\mathbf{a}$. W związku z tym, aby zapewnić wysoką precyzję rozwiązania w (9), prawdopodobieństwo poprawnej estymacji całkowitoliczbowej $\mathrm{P}(\check{\underline{\mathbf{a}}} = \mathbf{a})$ powinno być zbliżone do 1 (Teunissen 2017, rw. 23.17). Akceptacja lub odrzucenie realizacji $\check{\mathbf{a}}$ jest zatem fundamentalną decyzją w zadaniu precyzyjnego pozycjonowania. Ryzyko związane z akceptacją niepoprawnych realizacji $\check{\mathbf{a}}$ jest niewspółmiernie wysokie do zastosowania rozwiązania rzeczywistoliczbowego.




Rysunek 1: Geometryczna interpretacja regularyzowanej estymacji.

Estymator całkowitoliczbowy MNK jest optymalnym estymatorem, ponieważ maksymalizuje $\mathrm{P}(\underline{\check{\mathbf{a}}} = \mathbf{a})$ (Teunissen 1999). Wymaga jednak przeprowadzenia procedury poszukiwania realizacji $\check{\mathbf{a}}$. Estymator ten jest członkiem klasy estymatorów całkowitoliczbowych. Do wspomnianej klasy zalicza się również estymator bootstrap (ang. *integer bootstrapping*) oraz estymator oparty na zaokrąglaniu do najbliższej całkowitoliczbowej wartości (ang. *integer rounding*). Kolejna klasa skupia estymatory całkowitoliczbowej apertury (ang. *integer aperture*). Trzecia klasa koncentruje się natomiast na estymatorach całkowitoliczbowych ekwiwariantnych (ang. *integer equivariant*). Dodatkowo, wyróżnia się klasę estymatorów, które zawierają jednocześnie dwa podzbiory estymowanych nieoznaczoności pomiaru fazowego: całkowitoliczbowe i rzeczywistoliczbowe, tzw. (ang. *partial ambiguity estimation*).

**Regularyzowany model matematyczny**

W zadaniu opracowania jednoepokowego zbioru obserwacji model (3) jest dostrzegalnie słabszy jeżeli analizujemy $\mathrm{P}(\underline{\check{\mathbf{a}}} = \mathbf{a})$ w odniesieniu do zadania wieloepokowego (Verhagen i in. 2013, Rys. 21). W celu ustabilizowania realizacji parametrów modelu (3), a tym samym potencjalnego wzrostu $\mathrm{P}(\underline{\check{\mathbf{a}}} = \mathbf{a})$, zostaje wdrożona metoda regularyzacji. Pierwsze kryterium rozwinięcia w (7), czyli kryterium związane z etapem rozwiązania rzeczywistoliczbowego, zostaje przeformułowane tak, aby uwzględniać wpływ regularyzacji

$$\left(\underline{\hat{\mathbf{a}}}_k, \underline{\hat{\mathbf{b}}}_k\right) = \arg \min_{a \in \mathbb{R}^n,\, b \in \mathbb{R}^p} \left\| \underline{\mathbf{y}} - \mathbf{A}\mathbf{a} - \mathbf{B}\mathbf{b} \right\|^2_{Q_{yy}} + k \left\| \mathbf{x} \right\|^2_{K_x^{-1}} \tag{10}$$

gdzie $\underline{\hat{\mathbf{a}}}_k \in \mathbb{R}^n$ oraz $\underline{\hat{\mathbf{b}}}_k \in \mathbb{R}^p$ są regularyzowanymi estymatorami odpowiednio $\mathbf{a}$ oraz $\mathbf{b}$, tzw. (ang. *regularized float solutions*), $k$ jest parametrem regularyzacji, $\mathbf{K}_x \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jest dodatnio określoną macierzą regularyzacji oraz $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{(n+p)}$ jest wektorem nieznanych parametrów będących przedmiotem regularyzacji w modelu (3).

Pod warunkiem, że model (3) jest poprawnie sformułowany, estymatory rzeczywistoliczbowe w (7) są liniowymi estymatorami MNK o minimalnej wariancji i nieobciążonej właściwości (ang. *Best Linear Unbiased estimator*), czyli są estymatorami BLU. W związku

z przyjętym założeniem rozkładu normalnego prawdopodobieństwa w (5), estymatory rzeczywistoliczbowe MNK w (7) są również estymatorami największej wiarygodności (ang. *Maximum Likelihood estimator*) jeżeli rozkład normalny jest poprawnie zdefiniowany oraz macierzą wag w MNK jest $\mathbf{Q}_{yy}^{-1}$ (Teunissen 1998, podrozdz. 8.2.1). Pomimo, że regularyzowane estymatory nadal pozostają w liniowej relacji z wektorem $\underline{\mathbf{y}}$ oraz, że zaprojektowane są w celu redukcji wariancji to nie posiadają jednak własności nieobciążoności, tj. $\mathrm{E}(\underline{\hat{\mathbf{a}}}_k) \neq \mathbf{a}$ oraz $\mathrm{E}(\underline{\hat{\mathbf{b}}}_k) \neq \mathbf{b}$. Rysunek 1 przedstawia geometryczną interpretację regularyzowanej estymacji w kontekście braku rzutu ortogonalnego (ang. *orthogonal projection*), który może charakteryzować obciążoną estymację. Na Rys. 1, $\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{y} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{B}\hat{\mathbf{b}}$ oraz $\hat{\mathbf{e}}_k = \mathbf{y} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{a}}_k - \mathbf{B}\hat{\mathbf{b}}_k$ są realizacjami odpowiednio $\underline{\hat{\mathbf{e}}} \in \mathbb{R}^m$ oraz $\underline{\hat{\mathbf{e}}}_k \in \mathbb{R}^m$. W odróżnieniu od wektora rezyduów z estymacji MNK dla którego zachodzi $\mathrm{E}(\underline{\hat{\mathbf{e}}}) = \mathbf{0}$, wartość oczekiwana wektora regularyzowanych rezyduów jest różna od zera, tj. $\mathrm{E}(\underline{\hat{\mathbf{e}}}_k) = \mathbf{g}_{\hat{e}_k}$. Wskazuje to na obciążenie (ang. *bias*), które wynika z obciążenia regularyzowanych estymatorów, $\mathrm{E}(\underline{\hat{\mathbf{a}}}_k) \neq \mathbf{a}$ oraz $\mathrm{E}(\underline{\hat{\mathbf{b}}}_k) \neq \mathbf{b}$. W tym przypadku, stwarza to problem w walidacji modelu matematycznego, ponieważ do kryterium (10) zostały wprowadzone deterministyczne ograniczenia na parametry modelu (3). W związku z tym, regularyzowane estymatory nie są rozważane jako optymalne - nieobciążone - estymatory w sensie minimalnej wariancji a minimalnego błędu średniokwadratowego (ang. *mean squared error*). Oznacza to, że regularyzacja nie ma na celu dostarczenia estymatorów, których realizacje maksymalizują funkcję wiarygodności realizacji $\mathbf{y}$. W konsekwencji, nie ma na celu oszacowania parametrów rozkładu prawdopodobieństwa (5) w sposób dla nich optymalny. Celem regularyzacji jest natomiast zaprojektowanie takich estymatorów, których realizacje będą bliżej prawdziwych wartości parametrów modelu (3) w sensie MSE. Aby poprawnie opisać jakość regularyzowanych estymatorów w (10), należy zatem wdrożyć macierz MSE

$$\mathbf{MSE}_{\hat{x}_k\hat{x}_k} = \mathrm{E}\left[\left(\underline{\hat{\mathbf{x}}}_k - \mathbf{x}\right)\left(\underline{\hat{\mathbf{x}}}_k - \mathbf{x}\right)^T\right] = \mathbf{Q}_{\hat{x}_k\hat{x}_k} + \mathbf{g}_{\hat{x}_k}\mathbf{g}_{\hat{x}_k}^T \tag{11}$$

gdzie $\mathbf{Q}_{\hat{x}_k\hat{x}_k}$ jest regularyzowaną macierzą kowariancji na podstawie której można opisać poprawioną precyzję dzięki redukcji wariancji, natomiast $\mathbf{g}_{\hat{x}_k} = \mathrm{E}\left(\underline{\hat{\mathbf{x}}}_k\right) - \mathbf{x}$ jest wektorem obciążenia $\underline{\hat{\mathbf{x}}}_k$ na podstawie którego można opisać koszt wynikający z zastosowania regularyzacji. W oparciu o (11) można stwierdzić, że znalezienie optymalnego kompromisu między redukcją wariancji a obciążeniem regularyzowanego estymatora jest kluczowe. Optymalny kompromis oznacza, że poprawa precyzji w postaci redukcji wariancji jest większa niż koszt w postaci obciążenia. Parametr regularyzacji powinien zatem kontrolować kompromis tak, aby $\mathbf{MSE}_{\hat{x}_k\hat{x}_k} < \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}$, gdzie $\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}$ jest macierzą kowariancji z MNK. W przeciwnym razie jest możliwe, że $\mathbf{MSE}_{\hat{x}_k\hat{x}_k} > \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}$. W związku z tym, opis jakości przedstawiony wyłącznie na podstawie $\mathbf{Q}_{\hat{x}_k\hat{x}_k}$ byłby zbyt optymistyczny - w istocie niepoprawny. Jednak w przypadku kontrolowania kompromisu można zapewnić, że nawet zbyt optymistyczny opis jakości na podstawie $\mathbf{Q}_{\hat{x}_k\hat{x}_k}$ nie powoduje zauważalnych konsekwencji.

Parametr regularyzacji nie jest wyznaczany w sposób arbitralny lecz znaleziony na podstawie charakterystyki modelu (3). Ściślej rzecz ujmując, parametr regularyzacji może zostać wyznaczony na podstawie opisu jakości *a priori* regularyzowanego estymatora, czyli

na podstawie kryterium minimalizacji śladu $\mathbf{MSE}_{\hat{x}_k\hat{x}_k}$

$$k = \arg\min_{k\in\mathbb{R}} \operatorname{tr}\left(\mathbf{MSE}_{\hat{x}_k\hat{x}_k}(k)\right) \tag{12}$$

gdzie $\operatorname{tr}(\cdot)$ oznacza ślad macierzy oraz $\frac{\partial^2 \operatorname{tr}(\mathbf{MSE}_{\hat{x}_k\hat{x}_k}(k))}{\partial k^2} > 0$. Kluczowe zatem jest znalezienie takiego $k$, na podstawie którego opis jakości regularyzowanego estymatora jest zauważalnie lepszy od opisu jakości estymatora MNK, tj. $\operatorname{tr}(\mathbf{MSE}_{\hat{x}_k\hat{x}_k}(k)) < \operatorname{tr}(\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}})$.

Regularyzowane rozwiązanie rzeczywistoliczbowe (10) w konsekwencji wpływa na estymację całkowitoliczbową nieoznaczoności pomiaru fazowego (ang. *regularized integer ambiguity estimation*)

$$\check{\underline{\mathbf{a}}}_k = \arg\min_{z\in\mathbb{Z}^n} ||\hat{\underline{\mathbf{a}}}_k - \mathbf{z}||^2_{Q_{\hat{a}_k\hat{a}_k}} \tag{13}$$

gdzie $\check{\underline{\mathbf{a}}}_k \in \mathbb{Z}^n$ jest regularyzowanym estymatorem $\mathbf{a}$, $\mathbf{Q}_{\hat{a}_k\hat{a}_k}$ jest regularyzowaną macierzą kowariancji $\hat{\underline{\mathbf{a}}}_k$. Estymator $\hat{\underline{\mathbf{b}}}_k$ zostaje natomiast uwarunkowany na estymatorze całkowitoliczbowym $\check{\underline{\mathbf{a}}}_k$ z (13), tzw. (ang. *regularized fixed solution*)

$$\check{\underline{\mathbf{b}}}_k = \hat{\underline{\mathbf{b}}}_k\left(\check{\underline{\mathbf{a}}}_k\right) = \hat{\underline{\mathbf{b}}}_k - \mathbf{Q}_{\hat{b}_k\hat{a}_k}\mathbf{Q}^{-1}_{\hat{a}_k\hat{a}_k}\left(\hat{\underline{\mathbf{a}}}_k - \check{\underline{\mathbf{a}}}_k\right) \tag{14}$$

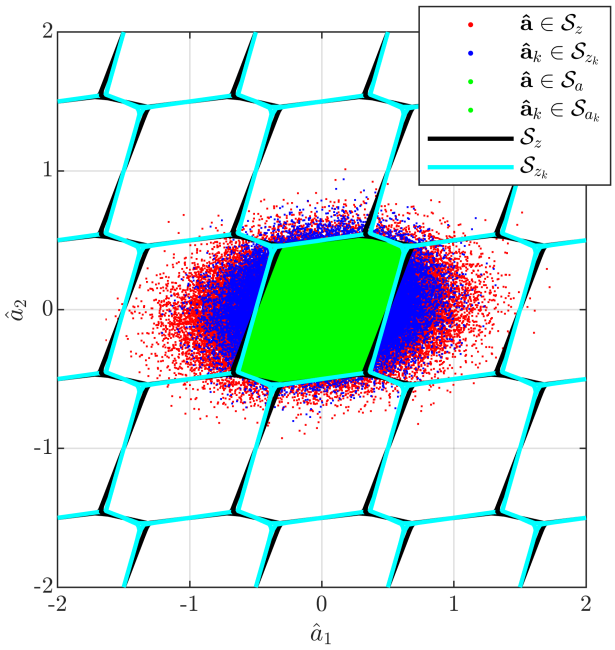
gdzie $\check{\underline{\mathbf{b}}}_k \in \mathbb{R}^p$ jest regularyzowanym estymatorem $\mathbf{b}$, $\mathbf{Q}_{\hat{b}_k\hat{a}_k}$ jest macierzą zawierającą kowariancje. Biorąc pod uwagę, że $\hat{\underline{\mathbf{b}}}_k(\mathbf{a})$ jest obciążonym estymatorem $\mathbf{b}$, tj. $\mathrm{E}(\hat{\underline{\mathbf{b}}}_k(\mathbf{a})) \neq \mathbf{b}$, jakość $\hat{\underline{\mathbf{b}}}_k(\mathbf{a})$ zostaje opisana za pomocą $\mathbf{MSE}_{\hat{b}_k(a)\hat{b}_k(a)}$

$$\mathbf{MSE}_{\hat{b}_k(a)\hat{b}_k(a)} = \mathbf{Q}_{\hat{b}_k(a)\hat{b}_k(a)} + \mathbf{g}_{\hat{b}_k(a)}\mathbf{g}^T_{\hat{b}_k(a)} \tag{15}$$

gdzie $\mathbf{g}_{\hat{b}_k(a)}$ jest wektorem obciążenia $\hat{\underline{\mathbf{b}}}_k(\mathbf{a})$.

Zgodnie z teorią obszarów przyciągania (ang. *pull-in region theory*), estymator całkowitoliczbowy MNK (8) oraz jego regularyzowany odpowiednik (13) mogą zostać zinterpretowane w sposób geometryczny (Teunissen 1998). Obszary przyciągania wypełniają w pełni całą przestrzeń $\mathbb{R}^n$ bez zachodzenia. Definiowane są jako unikalne zbiory wielu $\mathbf{s}_j \in \mathbb{R}^n$, które są przyciągane do jednego i tego samego rozwiązania całkowitoliczbowego $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^n$, $\mathcal{S}_{z_j} = \{\mathbf{s}_j \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{z} = \mathbf{F}_j(\mathbf{s}_j)\}$. Funkcja mapująca $\mathbf{F}_j$ jest unikalna dla danego estymatora całkowitoliczbowego i uwzględnia metrykę przestrzeni $\mathbb{R}^n$, która z kolei jest określona przez macierz kowariancji. W przypadku zastosowania regularyzacji indeks $j = k$, inaczej indeks $j$ pozostaje pusty. Na Rys. 2 zaprezentowano przykład estymacji całkowitoliczbowej dla danego modelu (3). W tym celu przyjęto, że $\mathcal{S}_z$ oraz $\mathcal{S}_{z_k}$ są obszarami przyciągania odpowiednio $\check{\underline{\mathbf{z}}}$ oraz $\check{\underline{\mathbf{z}}}_k$, podczas gdy $\mathcal{S}_a$ oraz $\mathcal{S}_{a_k}$ są obszarami przyciągania odpowiednio $\check{\underline{\mathbf{a}}}$ oraz $\check{\underline{\mathbf{a}}}_k$. Pomimo kosztu wynikającego z zastosowania regularyzacji w postaci obciążenia estymatora, następuje stabilizacja rozwiązań rzeczywistoliczbowych. W związku z tym, zostaje odnotowany wzrost prawdopodobieństwa poprawnej estymacji całkowitoliczbowej gdzie $\hat{\mathrm{P}}(\hat{\underline{\mathbf{a}}}_k \in \mathcal{S}_{a_k}) = \hat{\mathrm{P}}(\check{\underline{\mathbf{a}}}_k = \mathbf{a}) = 0.89$, podczas gdy $\hat{\mathrm{P}}(\hat{\underline{\mathbf{a}}} \in \mathcal{S}_a) = \hat{\mathrm{P}}(\check{\underline{\mathbf{a}}} = \mathbf{a}) = 0.77$.

W związku z potencjałem płynącym z zastosowania regularyzacji, zasadne jest dokonanie szczegółowej analizy regularyzacji modelu (3). Niemniej jednak, należy podkreślić, że koszt wynikający z zastosowania regularyzacji stwarza problem w walidacji modelu matematycznego. Analiza walidacji regularyzowanego modelu stanowi zatem kluczową część




Rysunek 2: Obszary przyciągania estymatora całkowitoliczbowego MNK w kolorze czarnym oraz regularyzowanego w kolorze błękitnym. Czerwone kropki to rozwiązania rzeczywistoliczbowe MNK, które nie zapewniają poprawnego rozwiązania całkowitoliczbowego, ponieważ $\hat{\mathbf{a}} \notin \mathcal{S}_a$. Niebieskie kropki to regularyzowane rozwiązania rzeczywistoliczbowe, które również nie zapewniają poprawnego rozwiązania całkowitoliczbowego, ponieważ $\hat{\mathbf{a}}_k \notin \mathcal{S}_{a_k}$. Zielone kropki to natomiast rozwiązania rzeczywistoliczbowe, które zapewniają poprawne rozwiązanie całkowitoliczbowe, ponieważ $\hat{\mathbf{a}} \in \mathcal{S}_a$ oraz $\hat{\mathbf{a}}_k \in \mathcal{S}_{a_k}$ (na podstawie Fischer i in. (2023, Rys. 3)).

niniejszej pracy doktorskiej.

## 1.3 Sformułowanie celu oraz hipotezy badań

Na podstawie przeprowadzonej dyskusji w podrozdz. 1.2.1 oraz 1.2.2 zostały sformułowane trzy cele badań niniejszej pracy doktorskiej. W ramach każdego celu badań sformułowano jedną hipotezę.

*Cel 1*: Pierwszym celem była ocena skuteczności regularyzacji modelu matematycznego (3) w uzyskaniu wzrostu prawdopodobieństwa poprawnej estymacji całkowitoliczbowej. Badanie przeprowadzono w dziedzinie nieoznaczoności pomiaru fazowego w zadaniu opracowania jednoepokowego zbioru obserwacji. Wyniki analizy zostały przedstawione w pierwszym artykule, w którym zaproponowano oryginalne podejście do udoskonalenia klasycznej metody regularyzacji na etapie rozwiązania rzeczywistoliczbowego (Fischer i in. 2023).

W ramach tego celu sformułowano jedną hipotezę.

*Hipoteza*: Regularyzacja modelu matematycznego może doprowadzić do wzrostu prawdopodobieństwa poprawnej estymacji całkowitoliczbowej w dziedzinie nieoznaczoności pomiaru fazowego, a tym samym wpłynąć na wzrost częstotliwości akceptacji rozwiązania precyzyjnej pozycji odbiornika.

*Cel 2*: Drugim celem było rozwiązanie problemu dokładnej definicji obszaru poszukiwań całkowitoliczbowych nieoznaczoności pomiaru fazowego w dziedzinie współrzędnych.

Przedmiotem badań był model matematyczny (3) w zadaniu opracowania jednoepokowego zbioru obserwacji oraz obszar poszukiwań w metodzie MAFA-ILS. Ogólny problem dokładnej definicji obszaru poszukiwań w metodzie MAFA został podkreślony w pracy Nowel i in. (2018) oraz Cellmer i in. (2018). Rozwiązanie tego problemu zostało opisane w drugim artykule, w którym zaproponowano oryginalne podejście do udoskonalenia definicji obszaru poszukiwań w metodzie MAFA-ILS, proponując regularyzację warunkową (Fischer i in. 2024).

W ramach tego celu sformułowano jedną hipotezę.

*Hipoteza*: Regularyzacja warunkowa może udoskonalić definicję obszaru poszukiwań całkowitoliczbowych nieoznaczoności pomiaru fazowego w metodzie MAFA-ILS, zapewniając wzrost prawdopodobieństwa poprawnej estymacji całkowitoliczbowej w dziedzinie współrzędnych.

*Cel 3*: Trzecim celem - jednocześnie kluczowym - było rozwiązanie problemu walidacji modelu matematycznego ze względu na koszt wynikający z zastosowania regularyzacji w zadaniu opracowania jednoepokowego zbioru obserwacji. Odnosząc się do aktualnego stanu wiedzy oraz najnowszej literatury przedmiotu, powstała jedna praca naukowa podkreślająca ten problem i proponująca jego rozwiązanie (Li i in. 2021). Niemniej jednak, teoria z niej wynikająca nie gwarantuje ścisłego apartu matematycznego. W związku z tym, w ramach trzeciego artykułu zaproponowano rozwiązanie tego problemu (Fischer i in. 2025), które oparte jest na najnowszej teorii DIA (Teunissen 2018; Teunissen 2024a).

W ramach tego celu sformułowano jedną hipotezę.

*Hipoteza*: Walidacja regularyzowanego modelu matematycznego może zostać przeprowadzona w oparciu o najnowszą teorię DIA, oferując ścisły apart matematyczny.

# 2 Regularyzacja w pozycjonowaniu satelitarnym

W tym rozdziale zostaną omówione artykuły naukowe wchodzące w skład jednotematycznego cyklu publikacji. W ramach każdej pracy naukowej została podjęta problematyka, której towarzyszy indywidualny cel badawczy, sformułowany w poprzednim podrozdziale wraz z hipotezą badań.

## 2.1 Udoskonalenie klasycznej metody regularyzacji

W pracy Fischer i in. (2023) przeprowadzono ocenę skuteczności regularyzacji modelu matematycznego (3) w uzyskania wzrostu prawdopodobieństwa poprawnej estymacji całkowitoliczbowej. Analizę przeprowadzono w dziedzinie nieoznaczoności pomiaru fazowego w zadaniu opracowania jednoepokowego zbioru obserwacji.

Na podstawie literatury przedmiotu, na przykład Li i in. (2010) oraz Wu i Bian (2022), regularyzacja powszechnie jest stosowana w celu ustabilizowania realizacji rzeczywistoliczbowych nieoznaczoności. Niemniej jednak, wdrożenie regularyzacji na etapie rozwiązania rzeczywistoliczbowego nie zawsze zagwarantuje taki wzrost prawdopodobieństwa poprawnej estymacji całkowitoliczbowej, który pozwoli na akceptację realizacji całkowitoliczbowych nieoznaczoności. Użytkownikowi zostaje zatem zaoferowane rozwiązanie współrzędnych pozycji odbiornika, które jest uwarunkowane na regularyzowanych nieoznaczonościach. W związku z tym, aby ulepszyć jakość takiego rozwiązania, regularyzacji zostały poddane również współrzędne pozycji odbiornika, a w istocie przyrosty do współrzędnych pozycji przybliżonej. Ulepszone rozwiązanie pozycji odbiornika może zostać zaoferowane w oparciu o regularyzację zarówno nieoznaczoności jak i przyrostów do współrzędnych pozycji przybliżonej.

Parametrami będącymi przedmiotem zainteresowania w modelu (3) są nieoznaczoności pomiaru fazowego w liczbie $n$ oraz przyrosty do współrzędnych pozycji przybliżonej w liczbie $p$=3. W związku z tym, stanowią one przedmiot regularyzacji w modelu (3). Aby uwzględnić odmienność dwóch grup parametrów, klasyczna metoda regularyzacji zostaje udoskonalona na etapie rozwiązania rzeczywistoliczbowego. Udoskonalenie to polega na zaprojektowaniu dwóch różnych parametrów regularyzacji. W wyniku tego, każda grupa parametrów będących przedmiotem zainteresowania w modelu (3) jest niezależnie regularyzowana przez dedykowany im parametr regularyzacji. Następnie, zostaje wdrożona procedura iteracyjna w celu uzyskania lepszego przybliżenia nieznanych parametrów w kryterium minimalizacji śladu macierzy MSE. Kryterium minimalizacji śladu macierzy MSE jest wykorzystane do jednoczesnego wyznaczenia dwóch parametrów regularyzacji.

W rozdz. 1 pracy Fischer i in. (2023) wprowadzono do problematyki badań. Podstawy teoretyczne estymacji parametrów oraz analizy dokładności w ramach zaproponowanego udoskonalenia klasycznej metody regularyzacji opisano w rozdz. 2. W kolejnym rozdziale, tj. rozdz. 3, przedstawiono procedurę jednoczesnego wyznaczania dwóch parametrów regularyzacji. W rozdz. 4 omówiono model pozycjonowania z udoskonaloną metodą klasycznej regularyzacji. Następnie, wyodrębniono podrozdział, w którym przedstawiono wpływ regularyzacji na estymację całkowitoliczbową w dziedzinie nieoznaczoności wykorzystując

metodę symulacji Monte Carlo (4.1). W rozdz. 5 oraz 6 zostały przeprowadzone eksperymenty numeryczne w oparciu odpowiednio o obserwacje symulowane oraz rzeczywiste. Kolejno, zostały poddane dyskusji wyniki uzyskane w ramach tych eksperymentów. W rozdz. 7 podsumowano pracę oraz sformułowano wnioski.

### 2.1.1 Podstawy teoretyczne

Punktem startowym jest kryterium rozwiązania rzeczywistoliczbowego, które przyjmuje następującą postać

$$\underline{\hat{\mathbf{x}}}_k^{(i)} = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^{(n+p)}} \left\| \underline{\mathbf{y}} - \mathbf{A}_{AB}\mathbf{x} \right\|_{Q_{yy}}^2 + \|\Delta\mathbf{x}\|_{K_x^{-1}}^2 \tag{16}$$

gdzie $\underline{\hat{\mathbf{x}}}_k^{(i)} \in \mathbb{R}^{(n+p)}$ jest regularyzowanym estymatorem $\mathbf{x} = [\mathbf{a}\ \mathbf{b}]^T$ w $i$-tej iteracji, $\mathbf{A}_{AB} = [\mathbf{A}\ \mathbf{B}]$ jest macierzą modelową, $\Delta\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{(n+p)}$ jest wektorem nieznanych przyrostów do prawdziwych wartości parametrów, tj. $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_k^{(i-1)}$ gdzie $\mathbf{x}_k^{(i-1)}$ jest oszacowaniem wektora parametrów z ($i$-1) iteracji, $\mathbf{K}_x \in \mathbb{R}^{(n+p)\times(n+p)}$ jest dodatnio określoną macierzą regularyzacji taką, że rank $(\mathbf{K}_x) = n+p$, zawierającą na przekątnej parametry regularyzacji

$$\mathbf{K}_x = \begin{bmatrix} k_a\mathbf{I}_{n\times n} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & k_b\mathbf{I}_{p\times p} \end{bmatrix} \tag{17}$$

gdzie $k_a$ oraz $k_b$ to parametry regularyzacji odpowiednio $\mathbf{a}$ oraz $\mathbf{b}$. Na tym etapie można dostrzec, że każda grupa parametrów jest regularyzowana przez inny parametr regularyzacji. Przechodząc do postaci rozwiązania kryterium (16), przyjmujemy za funkcję celu tego kryterium $\psi(\mathbf{x})$. Warunek konieczny na istnienie ekstremum funkcji celu zostaje zweryfikowany w punkcie $\mathbf{x} = \underline{\hat{\mathbf{x}}}_k^{(i)}$, $\frac{\partial\psi(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}\Big|_{\mathbf{x}=\underline{\hat{\mathbf{x}}}_k^{(i)}} = \mathbf{0}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}\Big|_{\mathbf{x}=\underline{\hat{\mathbf{x}}}_k^{(i)}} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\underline{\mathbf{y}} - \mathbf{A}_{AB}\mathbf{x}\right)^T \mathbf{Q}_{yy}^{-1}\left(\underline{\mathbf{y}} - \mathbf{A}_{AB}\mathbf{x}\right) + \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k^{(i-1)}\right)^T \mathbf{K}_x\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k^{(i-1)}\right)\Big|_{\mathbf{x}=\underline{\hat{\mathbf{x}}}_k^{(i)}} \\ &= \mathbf{0} \end{aligned} \tag{18}$$

gdzie $\mathbf{x}_k^{(i-1)}$ jest rozważany w $i$-tej iteracji jako wektor o charakterze nielosowym. Przechodząc do układu równań normalnych otrzymujemy

$$\mathbf{A}_{AB}^T\mathbf{Q}_{yy}^{-1}\mathbf{A}_{AB}\underline{\hat{\mathbf{x}}}_k^{(i)} + \mathbf{K}_x\underline{\hat{\mathbf{x}}}_k^{(i)} = \mathbf{A}_{AB}^T\mathbf{Q}_{yy}^{-1}\underline{\mathbf{y}} + \mathbf{K}_x\mathbf{x}_k^{(i-1)} \tag{19}$$

gdzie można dostrzec, że $\mathbf{K}_x$ równoważy obie strony układu równań normalnych. Rozwiązaniem minimalizującym $\psi(\mathbf{x})$ jest zatem estymator o następującej postaci

$$\underline{\hat{\mathbf{x}}}_k^{(i)} = \left(\mathbf{A}_{AB}^T\mathbf{Q}_{yy}^{-1}\mathbf{A}_{AB} + \mathbf{K}_x\right)^{-1}\left(\mathbf{A}_{AB}^T\mathbf{Q}_{yy}^{-1}\underline{\mathbf{y}} + \mathbf{K}_x\mathbf{x}_k^{(i-1)}\right) \tag{20}$$

gdzie $\mathbf{x}_k^{(i-1)}$ jest realizacją $\underline{\hat{\mathbf{x}}}_k^{(i-1)} \in \mathbb{R}^{(n+p)}$, będącego regularyzowanym estymatorem $\mathbf{x}$ w ($i$-1) iteracji. Pomimo obciążonej właściwości $\underline{\hat{\mathbf{x}}}_k^{(i)}$, tj. $\mathrm{E}(\underline{\hat{\mathbf{x}}}_k^{(i)}) \neq \mathbf{x}$, ujawnionej w (18), regularyzowany estymator może nadal zapewnić optymalne rozwiązanie minimalizujące

$\psi(\mathbf{x})$. Optymalność polega jednak nie na osiągnięciu minimalnej wariancji a minimalnego MSE. W związku z tym, kluczową rolę pełni $\mathbf{K}_x$. Parametry regularyzacji znajdujące się na przekątnej $\mathbf{K}_x$ powinny zostać wyznaczone w taki sposób, aby minimalizować MSE. Następnie, może zostać zweryfikowane, czy w punkcie $\mathbf{x} = \underline{\hat{\mathbf{x}}}_k^{(i)}$ jest spełniony warunek wystarczający na istnienie ekstremum funkcji celu $\frac{\partial^2 \psi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2}\Big|_{\mathbf{x}=\underline{\hat{\mathbf{x}}}_k^{(i)}}$

$$\frac{\partial^2 \psi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2}\bigg|_{\mathbf{x}=\underline{\hat{\mathbf{x}}}_k^{(i)}} = \mathbf{A}_{AB}^T \mathbf{Q}_{yy}^{-1} \mathbf{A}_{AB} + \mathbf{K}_x \tag{21}$$

gdzie $\mathbf{A}_{AB}^T \mathbf{Q}_{yy}^{-1} \mathbf{A}_{AB} + \mathbf{K}_x$ jest dodatnio określoną macierzą. W związku z tym, dla dowolnego wektora $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{(n+p)}$ spełniona jest nierówność $\mathbf{x}^T(\mathbf{A}_{AB}^T \mathbf{Q}_{yy}^{-1} \mathbf{A}_{AB} + \mathbf{K}_x)\mathbf{x} > 0$. Estymator obciążony, $\mathrm{E}(\underline{\hat{\mathbf{x}}}_k^{(i)}) \neq \mathbf{x}$, spełniający warunek konieczny (por. (18)), minimalizuje zatem $\psi(\mathbf{x})$.

Estymator nieobciążony, $\mathrm{E}(\underline{\hat{\mathbf{x}}}^{(i)}) = \mathbf{x}$, nie spełni natomiast warunku koniecznego na istnienie ekstremum funkcji celu w punkcie $\mathbf{x} = \underline{\hat{\mathbf{x}}}^{(i)}$, tj. $\frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\Big|_{\mathbf{x}=\underline{\hat{\mathbf{x}}}^{(i)}} \neq \mathbf{0}$. Jest to konsekwencją sformułowania kryterium (16), w którym na parametry będące przedmiotem regularyzacji nałożono ograniczenia. Celem tak sformułowanego kryterium jest uzyskanie $\underline{\hat{\mathbf{x}}}_k^{(i)}$ o najwyższej dokładności w sensie MSE w ostatniej iteracji. Zbieżność rozwiązania w (16) zostaje osiągnięta, jeżeli jest spełnione następujące kryterium

$$|\mathrm{diag}\left(\mathbf{K}_x^{(i)}\right) - \mathrm{diag}\left(\mathbf{K}_x^{(i-1)}\right)| < \tau \tag{22}$$

gdzie $\mathrm{diag}(\cdot)$ jest operatorem zwracającym diagonalne elementy argumentu, $\tau \in \mathbb{R}^{(n+p)}$ jest wektorem wartości progowych. W celu uproszczenia zapisu, nie wprowadzono identyfikatora iteracji dla $\mathbf{K}_x$ w kryterium (16).

W związku z obciążeniem, opis jakości $\underline{\hat{\mathbf{x}}}_k^{(i)}$ zostaje przeprowadzony w oparciu o $\mathbf{MSE}_{\hat{x}_k \hat{x}_k}$

$$\mathbf{MSE}_{\hat{x}_k \hat{x}_k} = \mathbf{Q}_{\hat{x}_k \hat{x}_k} + \mathbf{g}_{\hat{x}_k} \mathbf{g}_{\hat{x}_k}^T \tag{23}$$

gdzie $\mathbf{Q}_{\hat{x}_k \hat{x}_k}$ jest regularyzowaną macierzą kowariancji

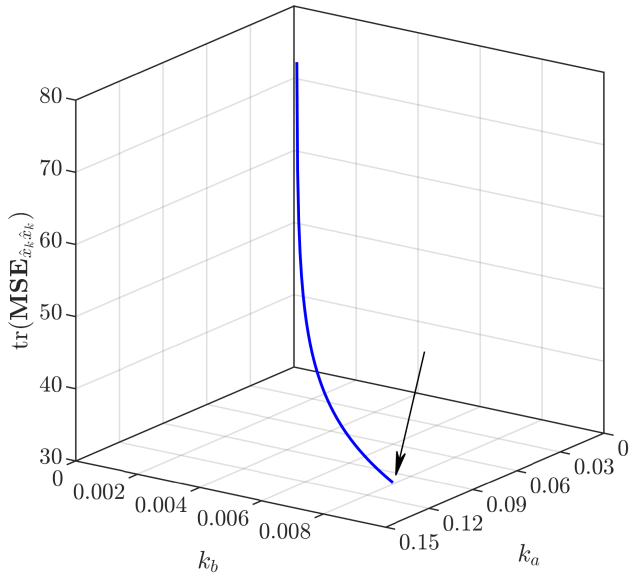
$$\mathbf{Q}_{\hat{x}_k \hat{x}_k} = \sigma_0^2 \left(\mathbf{A}_{AB}^T \mathbf{Q}_{yy}^{-1} \mathbf{A}_{AB} + \mathbf{K}_x\right)^{-1} \mathbf{A}_{AB}^T \mathbf{Q}_{yy}^{-1} \mathbf{A}_{AB} \left(\mathbf{A}_{AB}^T \mathbf{Q}_{yy}^{-1} \mathbf{A}_{AB} + \mathbf{K}_x\right)^{-1} \tag{24}$$

opisującą poprawioną precyzję w kontekście redukcji wariancji, podczas gdy $\mathbf{g}_{\hat{x}_k}$ jest wektorem obciążenia

$$\mathbf{g}_{\hat{x}_k} = -\mathbf{K}_x \left(\mathbf{A}_{AB}^T \mathbf{Q}_{yy}^{-1} \mathbf{A}_{AB} + \mathbf{K}_x\right)^{-1} \Delta \mathbf{x} \tag{25}$$

opisującym koszt, który wynika z zastosowania regularyzacji. W celu praktycznej oceny, wektor nieznanych przyrostów do prawdziwych wartości parametrów $\Delta \mathbf{x}$ należy aproksymować wykorzystując $\Delta \underline{\hat{\mathbf{x}}}_k = \underline{\hat{\mathbf{x}}}_k^{(i)} - \mathbf{x}_k^{(i-1)}$ (Xu i in. 2006b).

Parametry regularyzacji na przekątnej $\mathbf{K}_x$ są kluczowe dla kryterium (16). W związku z tym, że $\mathbf{K}_x$ powinno zapewnić minimalne MSE w rozwiązaniu (16), wartości dwóch różnych parametrów regularyzacji (por. (17)) zostaną jednocześnie wyznaczone na podstawie




Rysunek 3: Jednoczesne wyznaczenie dwóch różnych parametrów regularyzacji w oparciu o minimalizację śladu $\mathbf{MSE}_{\hat{x}_k\hat{x}_k}$. Czarna strzałka wskazuje punkt, w którym został osiągnięty minimalny ślad $\mathbf{MSE}_{\hat{x}_k\hat{x}_k}$ (na podstawie Fischer i in. (2023, Rys. 2)).

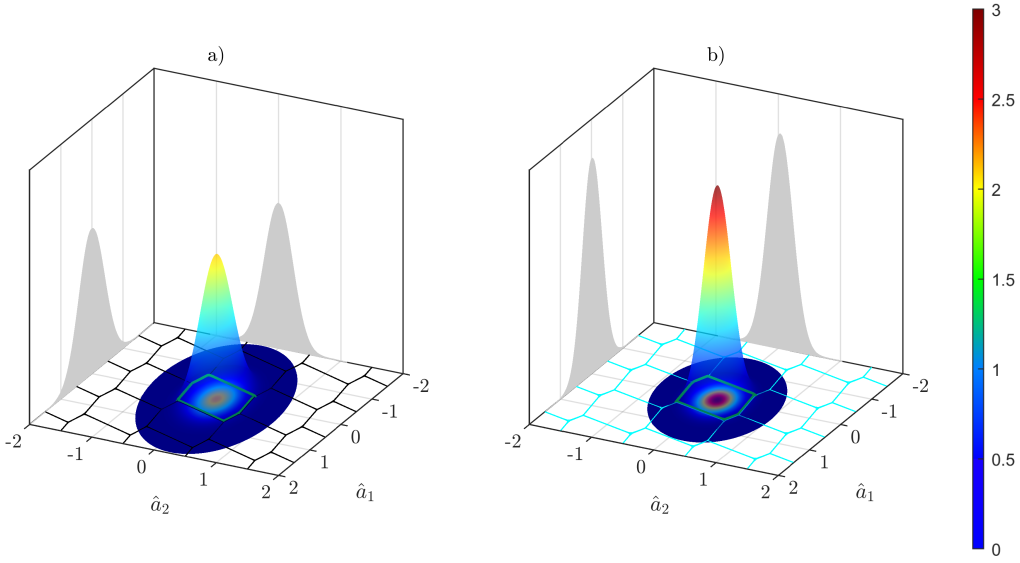
kryterium minimalizacji śladu $\mathbf{MSE}_{\hat{x}_k\hat{x}_k}$

$$\mathbf{K}_x = \arg \min_{K_x \in \mathbb{R}^{(n+p)\times(n+p)}} \operatorname{tr}\Big( \Big(\mathbf{A}_{AB}^T \mathbf{Q}_{yy}^{-1} \mathbf{A}_{AB} + \mathbf{K}_x\Big)^{-1} \Big(\sigma_0^2 \mathbf{A}_{AB}^T \mathbf{Q}_{yy}^{-1} \mathbf{A}_{AB} + \mathbf{K}_x \mathbf{K}_x \Delta\mathbf{x}\Delta\mathbf{x}^T\Big) \Big(\mathbf{A}_{AB}^T \mathbf{Q}_{yy}^{-1} \mathbf{A}_{AB} + \mathbf{K}_x\Big)^{-1} \Big) \tag{26}$$

gdzie $\Delta\mathbf{x}\Delta\mathbf{x}^T$ jest macierzą, którą należy aproksymować w pierwszej iteracji, na przykład macierzą o postaci

$$\mathbf{Q}_{\hat{x}_0} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\hat{a}_0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{\hat{b}_0} \end{bmatrix} \tag{27}$$

gdzie $\mathbf{Q}_{\hat{a}_0}$ oraz $\mathbf{Q}_{\hat{b}_0}$ są inicjalnymi macierzami kowariancji odpowiednio **a** oraz **b** na etapie rozwiązania rzeczywistoliczbowego. Technicznie rzecz biorąc, $\mathbf{Q}_{\hat{a}_0}$ może zostać sformułowane równoważnie do propozycji Cellmera i in. (2022, rw. 17), podczas gdy $\mathbf{Q}_{\hat{b}_0}$ może zostać wyznaczone na podstawie modelu obserwacji kodowych. Należy podkreślić, że taka aproksymacja jest dopuszczalna pod warunkiem, że wstępne oszacowanie parametrów jest stabilne. W odróżnieniu od zadania wieloepokowego, wstępne oszacowanie parametrów może okazać się niestabilne w zadaniu jednoepokowym. W związku z tym, została wdrożona procedura iteracyjna do kryterium (16) tak, aby w kolejnych iteracjach $\Delta\mathbf{x}\Delta\mathbf{x}^T$ aproksymowana była regularyzowanym oszacowaniem, tj. $\Delta\underline{\hat{\mathbf{x}}}_k \Delta\underline{\hat{\mathbf{x}}}_k^T$. W celu graficznej interpretacji kryterium (26), na Rys. 3 został przedstawiony proces jednoczesnego wyznaczenia dwóch różnych parametrów regularyzacji wykorzystując numeryczną metodę gradientu prostego.




Rysunek 4: Funkcja gęstości rzeczywistoliczbowych nieoznaczoności pomiaru fazowego: a) estymator MNK, b) regularyzowany estymator (na podstawie Fischer i in. (2023, Rys. 4)).

### 2.1.2 Opis jakości i ocena skuteczności

Rzeczywistoliczbowe rozwiązanie kryterium (16) ograniczymy na danym etapie do jego $n$ pierwszych elementów zapisanych w wektorze $\underline{\hat{\mathbf{a}}}_k \in \mathbb{R}^n$, który jest regularyzowanym estymatorem $\mathbf{a}$. Rozkład prawdopodobieństwa $\underline{\hat{\mathbf{a}}}_k$ to $n$-wymiarowy niecentralny rozkład normalny

$$\underline{\hat{\mathbf{a}}}_k \sim \mathcal{N}_n\left(\mathbf{a} + \mathbf{g}_a, \mathbf{Q}_{\hat{a}_k\hat{a}_k}\right), \quad \mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n, \quad \mathbf{g}_a \in \mathbb{R}^n \tag{28}$$

gdzie $\mathbf{g}_a \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem prawdziwego obciążenia $\underline{\hat{\mathbf{a}}}_k$. W związku z tym, że $\underline{\hat{\mathbf{a}}}_k$ jest ciągłą zmienną losową, niecentralny rozkład prawdopodobieństwa (28) zostaje opisany za pomocą funkcji gęstości (ang. *probability density function*)(Teunissen 2001, rw. 7)

$$f_{\underline{\hat{a}}_k}(\mathbf{s} \mid \mathbf{a},\ \mathbf{g}_a) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sqrt{|\mathbf{Q}^{-1}_{\hat{a}_k\hat{a}_k}|} \exp\left(-\frac{1}{2}\|\mathbf{s} - \mathbf{a} - \mathbf{g}_a\|^2_{Q_{\hat{a}_k\hat{a}_k}}\right) \tag{29}$$

będącą w istocie źródłem informacji o opisie jakości $\underline{\hat{\mathbf{a}}}_k$. W celu praktycznej oceny jakości $\underline{\hat{\mathbf{a}}}_k$, wektor prawdziwego obciążenia $\mathbf{g}_a$ można aproksymować $n$ pierwszymi elementami wektora z (25), które zostają zapisane w wektorze $\mathbf{g}_{\hat{a}_k}$. Jednakże postać rozkładu (28) staje się w konsekwencji przybliżeniem niecentralnego rozkładu normalnego prawdopodobieństwa $\underline{\hat{\mathbf{a}}}_k$. Należy zatem być świadomym, że opis jakości $\underline{\hat{\mathbf{a}}}_k$ nie jest w pełni ścisły. Uogólniając, dotyczy to rozkładu prawdopodobieństwa wszystkich regularyzowanych estymatorów, co stanowi niewątpliwie wadę regularyzacji.

Na Rys. 4 poddano analizie dwie funkcje gęstości rzeczywistoliczbowych nieoznaczoności (Fischer i in. 2023, na podstawie Rys. 2). Część a) dotyczy estymatora MNK podczas gdy b) jego regularyzowanego odpowiednika. Można dostrzec, że b) jest bardziej szczytowa w porównaniu z a), co skutkuje wzrostem prawdopodobieństwa, że realizacja regularyzowanego estymatora znajdzie się w obszarze przyciągania $\mathcal{S}_{a_k}$ poprawnego rozwiązania całkowitoliczbowego $\mathbf{a}$. Jest to wynikiem redukcji wariancji regularyzowanego estymatora. Jed-

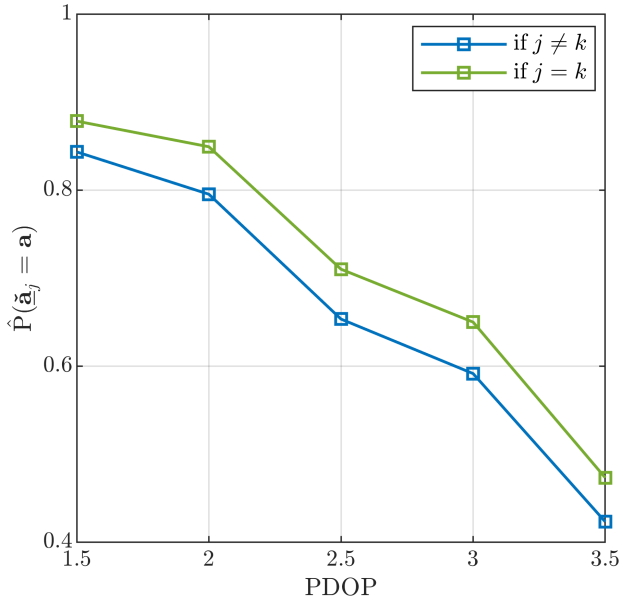
nakże b) jest przesunięty względem **a**, ponieważ regularyzowany estymator jest obciążony, tj. $\mathrm{E}(\underline{\hat{\mathbf{a}}}_k) \neq \mathbf{a}$. Obciążenie jest kosztem redukcji wariancji. Innymi słowy, mniejszy rozrzut realizacji regularyzowanego estymatora wokół **a** kosztuje przesunięciem każdej wspominanej realizacji względem **a**. Wyznaczenie parametrów regularyzacji (por. (26)) takich, że $\mathrm{tr}(\mathbf{MSE}_{\hat{x}_k\hat{x}_k}) < \mathrm{tr}(\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}})$ jest zatem kluczowe. Nieodpowiednie wartości parametrów regularyzacji mogą natomiast doprowadzić do sytuacji, w której regularyzowane rozwiązanie rzeczywistoliczbowe jest wysoce niestabilne. W takiej sytuacji, wspomniane rozwiązanie może nawet charakteryzować opis jakości, który jest dostrzegalnie gorszy w porównaniu z opisem jakości rozwiązania MNK, tj. $\mathbf{MSE}_{\hat{x}_k\hat{x}_k} > \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}$. Zarówno przedstawiona, jak i poniższa analiza mogą reprezentować wczesny etap praktycznej oceny skuteczności zaproponowanego udoskonalenia klasycznej metody regularyzacji.

Na podstawie wyników eksperymentu opartego na obserwacjach symulowanych, udoskonalona metoda klasycznej regularyzacji zapewnia parametry regularyzacji dzięki którym uzyskujemy najniższą średnią wartość $\mathrm{tr}(\mathbf{MSE}_{\hat{x}_k\hat{x}_k})$ w każdej grupie parametrów (Fischer i in. 2023, Rys. 9). Uzyskane wyniki zostały porównane z wynikami estymacji MNK oraz regularyzacji, w której zaniedbujemy odmienność dwóch grup parametrów, wyznaczając jeden parametr regularyzacji. Należy podkreślić, że źródłem ulepszenia opisu jakości jest uwzględnienie odmienności dwóch grup parametrów, **a** oraz **b**, poprzez wyznaczenie dwóch różnych parametrów regularyzacji. W ten sposób, jedna grupa parametrów nie wpływa na drugą podczas jednoczesnego wyznaczenia parametrów regularyzacji. Udoskonalona metoda klasycznej regularyzacji zapewnia zatem większą poprawę precyzji - większą redukcję wariancji - analizując średnią wartość $\mathrm{tr}(\mathbf{Q}_{\hat{x}_k\hat{x}_k})$ w każdej grupie parametrów (Fischer i in. 2023, Rys. 8, Tab. 2). Jednakże w wyniku zwiększonej poprawy precyzji wzrasta również koszt. Koszt jest analizowany na podstawie średniej wartości obciążenia $\mathrm{tr}(\mathbf{g}_{\hat{x}_k}\mathbf{g}_{\hat{x}_k})$ w każdej grupie parametrów (Fischer i in. 2023, Tab. 2). Mimo wzrostu kosztu uzyskujemy najniższą średnią wartość $\mathrm{tr}(\mathbf{MSE}_{\hat{x}_k\hat{x}_k})$ w każdej grupie parametrów. Jest to wynikiem najkorzystniejszego kompromisu między redukcją wariancji a obciążeniem (Fischer i in. 2023, Rys. 9). Analiza wyników potwierdza się w każdym wariancie eksperymentu, różniącym się pod względem liczby satelitów w geometrycznej konstrukcji pozycjonowania.

Estymacja całkowitoliczbowa nieoznaczoności (por. (13)) została poddana analizie ze względu na zastosowanie regularyzacji na etapie rozwiązania rzeczywistoliczbowego (16). Biorąc pod uwagę, że całkowitoliczbowa nieoznaczoność jest również zmienną losową jednakże o charakterze dyskretnym, rozkład prawdopodobieństwa zostaje opisany za pomocą funkcji masy prawdopodobieństwa (ang. *probability mass function*)

$$\mathrm{P}\left(\underline{\hat{\mathbf{a}}}_k \in \mathcal{S}_{z_k}\right) = \mathrm{P}\left(\underline{\check{\mathbf{a}}}_k = \mathbf{z}\right) = \int_{\mathcal{S}_{z_k}} f_{\underline{\hat{a}}_k}\left(\mathbf{s} \mid \mathbf{a},\ \mathbf{g}_a\right) \mathrm{d}\mathbf{s} \tag{30}$$

w obszarze przyciągania $\mathcal{S}_{z_k}$. Odnosząc się do fundamentalnego wniosku w pracy Teunissena (2001, rw. 4) (ang. *If the PDF $p_{\hat{a}}(x)$ and the pull-in region $\mathcal{S}_u$ are both u-symmetric, then the mean of the corresponding admissible integer estimator $\check{a}$ equals $u \in Z^n$*), można stwierdzić, że $\mathrm{E}(\underline{\check{\mathbf{a}}}_k) \neq \mathbf{a}$. Regularyzowany estymator całkowitoliczbowy jest zatem obciążony. Wynika to z tego, że funkcja gęstości (29) jest niesymetryczna względem **a** (por. Rys.




Rysunek 5: Średnia częstość akceptacji poprawnego rozwiązania całkowitoliczbowych nieoznaczoności pomiaru fazowego jako funkcji PDOP (na podstawie Fischer i in. (2023, Rys. 14)).

4 część b)). Mimo, że obszar przyciągania $\mathcal{S}_{a_k}$ pozostaje symetryczny względem $\mathbf{a}$, staje się niesymetryczny względem $\mathrm{E}(\underline{\check{\mathbf{a}}}_k)$. Oznacza to, że funkcja prawdopodobieństwa (30) jest nierównomiernie rozłożona wokół $\mathbf{a}$. Regularyzowany estymator całkowitoliczbowy $\underline{\check{\mathbf{a}}}_k$ dziedziczy zatem własność obciążoności estymatora rzeczywistoliczbowego $\underline{\hat{\mathbf{a}}}_k$ (por. (25)). W rezultacie, nie można rozważyć, że poprawne rozwiązanie całkowitoliczbowe $\underline{\check{\mathbf{a}}}_k = \mathbf{a}$ zostanie uzyskane jako *średnia* w (30).

Niewątpliwie praktyczną oceną skuteczności zaproponowanego udoskonalenia klasycznej metody regularyzacji jest prawdopodobieństwo poprawnej estymacji całkowitoliczbowej $\mathrm{P}(\underline{\hat{\mathbf{a}}}_k \in \mathcal{S}_{a_k}) = \mathrm{P}(\underline{\check{\mathbf{a}}}_k = \mathbf{a})$. Analiza wyników $\mathrm{P}(\underline{\check{\mathbf{a}}}_k = \mathbf{a})$ pozwoli zatem na rozważenie, czy można bezpiecznie zaniedbać obciążenie wynikające z $\underline{\check{\mathbf{a}}}_k$ i założyć, że realizacje regularyzowanego estymatora całkowitoliczbowego są deterministyczne? W przypadku gdy $\mathrm{P}(\underline{\check{\mathbf{a}}}_k = \mathbf{a}) \approx 1$ jest to dozwolone, ponieważ nie ma powodów dalszego rozważania potencjalnego wpływu obciążenia. Prawdopodobieństwo poprawnej estymacji całkowitoliczbowej wynika z (30) z uwzględnieniem, że całkowanie odbywa się w obszarze $\mathcal{S}_{a_k}$

$$\mathrm{P}\left(\underline{\hat{\mathbf{a}}}_k \in \mathcal{S}_{a_k}\right) = \mathrm{P}\left(\underline{\check{\mathbf{a}}}_k = \mathbf{a}\right) = \int_{\mathcal{S}_{a_k}} f_{\underline{\hat{a}}_k}\left(\mathbf{s} \mid \mathbf{a},\ \mathbf{g}_a\right) \mathrm{d}\mathbf{s} \tag{31}$$

będącym obszarem przyciągania poprawnego rozwiązania całkowitoliczbowego $\mathbf{a}$.

Jeżeli zbiór obserwacyjny staje się ograniczony pod względem liczby dostępnych satelitów w geometrycznej konstrukcji pozycjonowania, $\hat{\mathrm{P}}(\underline{\check{\mathbf{a}}}_k = \mathbf{a})$ zauważalnie wzrasta w porównaniu z $\hat{\mathrm{P}}(\underline{\check{\mathbf{a}}} = \mathbf{a})$ (Fischer i in. 2023, Tab. 1). Analizowane wyniki zostały uzyskane w ramach eksperymentu opartego na obserwacjach symulowanych. $\hat{\mathrm{P}}(\underline{\check{\mathbf{a}}} = \mathbf{a})$ oraz $\hat{\mathrm{P}}(\underline{\check{\mathbf{a}}}_k = \mathbf{a})$ zostały przybliżone w oparciu o stosunek liczby poprawnych realizacji estymatora całkowitoliczbowego $N_s$ do liczby wszystkich realizacji $N$, tj. $\hat{\mathrm{P}}(\underline{\check{\mathbf{a}}}_j = \mathbf{a}) \approx N_s/N$. W

przypadku wzrostu liczby satelitów z uwzględnieniem, że wzrost ten zapewnia poprawę geometrycznej konstrukcji pozycjonowania, $\hat{\mathrm{P}}(\underline{\check{\mathbf{a}}}_k = \mathbf{a})$ osiąga wartość zbliżoną do 1 szybciej aniżeli $\hat{\mathrm{P}}(\underline{\check{\mathbf{a}}} = \mathbf{a})$. Niemniej jednak, skuteczność regularyzacji wyraźnie spada jeżeli zbiór obserwacyjny przestaje być ograniczony pod względem liczby dostępnych satelitów pod warunkiem, że wzrost liczby satelitów zapewnia poprawę geometrycznej konstrukcji pozycjonowania. W ramach eksperymentu opartego na obserwacjach rzeczywistych, na Rys. 5 zostały przedstawione wyniki średniej częstości akceptacji poprawnego rozwiązania całkowitoliczbowego jako funkcji PDOP (Fischer i in. 2023, Rys. 14). Wyniki wskazują na przewagę $\hat{\mathrm{P}}(\underline{\check{\mathbf{a}}}_k = \mathbf{a})$ nad $\hat{\mathrm{P}}(\underline{\check{\mathbf{a}}} = \mathbf{a})$. Pomimo zastosowania regularyzacji (por. (16)), wyniki $\hat{\mathrm{P}}(\underline{\check{\mathbf{a}}}_k = \mathbf{a})$ nie zawsze jednak będą pozwalały na akceptację realizacji całkowitoliczbowych nieoznaczoności. Użytkownikowi zostaje zatem zaoferowane rozwiązanie współrzędnych pozycji odbiornika, które jest uwarunkowane na realizacji rzeczywistoliczbowych nieoznaczoności. W takim przypadku, udoskonalona metoda klasycznej regularyzacji zapewni rozwiązanie współrzędnych pozycji odbiornika o ulepszonym opisie jakości. Uzasadnieniem jest dodatkowa regularyzacja przyrostów do współrzędnych pozycji przybliżonej, która zapewnia, że $\mathrm{tr}(\mathbf{MSE}_{\hat{b}_k\hat{b}_k}) < \mathrm{tr}(\mathbf{Q}_{\hat{b}\hat{b}})$ (Fischer i in. 2023, Rys. 9 i 11).

Powszechnie stosowana dekorelacja całkowitoliczbowa nie wpływa natomiast na poprawę skuteczności estymatora całkowitoliczbowego MNK, tj. wzrost $\hat{\mathrm{P}}(\underline{\check{\mathbf{a}}} = \mathbf{a})$. Uzasadnieniem tego jest fakt, że pomimo ulepszenia kształtu obszaru poszukiwań optymalnego rozwiązania całkowitoliczbowego przy jednoczesnym zachowaniu jego objętości, lokalizacja obszaru poszukiwań nie ulega poprawie względem $\mathbf{a}$. Oznacza to, że estymator całkowitoliczbowy MNK jest niezmienniczym w stosunku do dekorelacji. Natomiast dodatkowe wdrożenie (16) zapewnia redukcję objętości obszaru poszukiwań oraz poprawę jego lokalizacji względem $\mathbf{a}$, ponieważ $\mathbf{MSE}_{\hat{a}_k\hat{a}_k} < \mathbf{Q}_{\hat{a}\hat{a}}$. W konsekwencji, czas poszukiwań spada, podczas gdy $\hat{\mathrm{P}}(\underline{\check{\mathbf{a}}}_k = \mathbf{a})$ wzrasta (Fischer i in. 2023, Tab. 1). Stanowi to ważną obserwację z praktycznego punktu widzenia. Należy również podkreślić, że efektywność dekorelacji całkowitoliczbowej, wdrożonej na przykład w metodzie LAMBDA (Teunissen 1995), spada gdy wymiar $\mathbf{a}$ wzrasta (Xu 2001). W takim przypadku, czas poszukiwań wzrasta pomimo zastosowania (16). Jednakże czas ten spada w porównaniu z czasem poszukiwań optymalnego rozwiązania całkowitoliczbowego z wykorzystaniem estymatora MNK. W pracy Xu (2001) zostało również dodane, że dekorelacja nie gwarantuje poprawy uwarunkowania modelu, w szczególności gdy wymiar $\mathbf{a}$ wzrasta.

## 2.2 Metoda regularyzacji warunkowej

W pracy Fischer i in. (2024) zaproponowano rozwiązanie problemu dokładnej definicji obszaru poszukiwań całkowitoliczbowych nieoznaczoności pomiaru fazowego w dziedzinie współrzędnych. Przedmiotem badań był model matematyczny (3) w zadaniu opracowania jednoepokowego zbioru obserwacji oraz obszar poszukiwań metody MAFA-ILS. Problem dokładnej definicji obszaru poszukiwań został podkreślony w pracy Nowel i in. (2018) oraz Cellmer i in. (2018). Rozwiązanie problemu polegało na zaproponowaniu metody regularyzacji warunkowej, która udoskonala definicję obszaru poszukiwań w metodzie MAFA-ILS. Ocena skuteczności udoskonalenia związana była z analizą potencjalnego wzrostu praw-

dopodobieństwa poprawnej estymacji całkowitoliczbowej w dziedzinie współrzędnych.

W pracy Nowel i in. (2018) został zasugerowany nowy wariant metody MAFA, tj. MAFA-ILS. W tym wariancie metody MAFA rozwiązanie całkowitoliczbowych nieoznaczoności może być równoważne rozwiązaniu uzyskanemu z wykorzystaniem estymatora całkowitoliczbowego MNK, na przykład z metody LAMBDA. Oznacza to, że rozwiązanie całkowitoliczbowych nieoznaczoności, które zostało uzyskane w ramach procedury poszukiwania w dziedzinie współrzędnych, może być optymalne, tzn. globalne, dla modelu (3). W związku z tym, w pracy Fischer i in. (2024) przedmiotem badań była MAFA-ILS w zadaniu opracowania jednoepokowego zbioru obserwacji.

Fundamentalnym etapem metody MAFA-ILS jest procedura poszukiwania rozwiązania globalnego całkowitoliczbowych nieoznaczoności, które są wyrażone niejawnie w funkcji współrzędnych. Dokładna definicja obszaru poszukiwań, skonstruowanego na podstawie wyników rozwiązania rzeczywistoliczbowego, jest kluczowa w celu przeprowadzenia poprawnej procedury poszukiwania w dziedzinie współrzędnych. Do wyników rozwiązania rzeczywistoliczbowego zalicza się rozwiązanie współrzędnych pozycji odbiornika, które jest uwarunkowane na rzeczywistoliczbowych nieoznaczonościach. Wyniki zostają uzupełnione o macierz kowariancji opisującą jakość tego rozwiązania.

Regularyzacja warunkowa polega na wyłącznej regularyzacji nieoznaczoności na etapie rozwiązania rzeczywistoliczbowego. Współrzędne pozycji odbiornika, a w istocie przyrosty do współrzędnych pozycji przybliżonej, nie zostają poddane regularyzacji lecz uwarunkowaniu na regularyzowanych nieoznaczonościach. Dzięki propozycji regularyzacji warunkowej otrzymujemy nowy - regularyzowany - wariant obszaru poszukiwań w metodzie MAFA-ILS. Obszar ten zostaje zdefiniowany na podstawie wyników regularyzowanego rozwiązania rzeczywistoliczbowego. Do wyników tego rozwiązania zalicza się regularyzowane rozwiązanie współrzędnych pozycji odbiornika oraz macierz kowariancji. Należy podkreślić, że stwierdzenie regularyzowane rozwiązanie współrzędnych pozycji odbiornika odnosi się do uwarunkowania na regularyzowanych nieoznaczonościach.

W rozdz. 1 pracy Fischer i in. (2024) wprowadzono do problematyki badań. Następnie, w rozdz. 2, opisano teoretyczne podstawy estymacji całkowito-rzeczywistoliczbowej MNK. W rozdz. 3 zaprezentowano metodę regularyzacji warunkowej. Kolejno, w rozdz. 4, opisano procedurę wyznaczania parametru regularyzacji. Aparat matematyczny metody MAFA został przedstawiony w rozdz. 5 wraz z opisem przybliżającym bliski związek metody MAFA-ILS z estymacją całkowito-rzeczywistoliczbową MNK. Rozdział ten został podzielony na trzy podrozdziały, w których kolejno omówiono: proces obliczeniowy metody MAFA (5.1), związek metody MAFA-ILS z estymacją całkowito-rzeczywistoliczbową MNK (5.2) oraz procedurę poszukiwania metody MAFA-ILS w dziedzinie współrzędnych (5.3). W rozdz. 5 przygotowano trzy eksperymenty na bazie metody symulacji Monte Carlo tak, aby przybliżyć związek metody MAFA-ILS z estymacją całkowito-rzeczywistoliczbową MNK. Metoda MAFA-ILS została zaprezentowana z uwzględnieniem wpływu regularyzacji w rozdz. 6. W tym rozdziale wyróżniono dwa podrozdziały, w których kolejno omówiono: wpływ regularyzacji na estymację całkowitoliczbową w dziedzinie współrzędnych (6.1) oraz definicję regularyzowanego obszaru poszukiwań metody MAFA-ILS. W rozdz.

6 przygotowano dwa eksperymenty na bazie metody symulacji Monte Carlo w celu przybliżenia wpływu regularyzacji na metodę MAFA-ILS. Eksperymenty numeryczne zostały przeprowadzone w rozdz. 7 w oparciu o obserwacje symulowane (7.1) oraz rzeczywiste (7.2). Następnie, poddano dyskusji wyniki uzyskane w ramach tych eksperymentów. W rozdziale 8 podsumowano pracę i sformułowano wnioski. Rozdział 5, 3, a także podrozdz. 6.2, są najważniejsze z punktu widzenia *celu badań 2* oraz sformułowanej w ramach tego celu *hipotezy*. Na tej podstawie, zostaną one szczegółowo przeanalizowane i omówione uwzględniając zadeklarowaną kolejność.

### 2.2.1 MAFA-ILS

Kryterium metody MAFA, w tym metody MAFA-ILS, jest o następującej postaci

$$\check{\underline{\mathbf{b}}} = \arg\min_{b\in\mathbb{R}^p} \|\underline{\boldsymbol{\Delta}} - \mathbf{B}\mathbf{b}\|^2_{Q_{yy}} \tag{32}$$

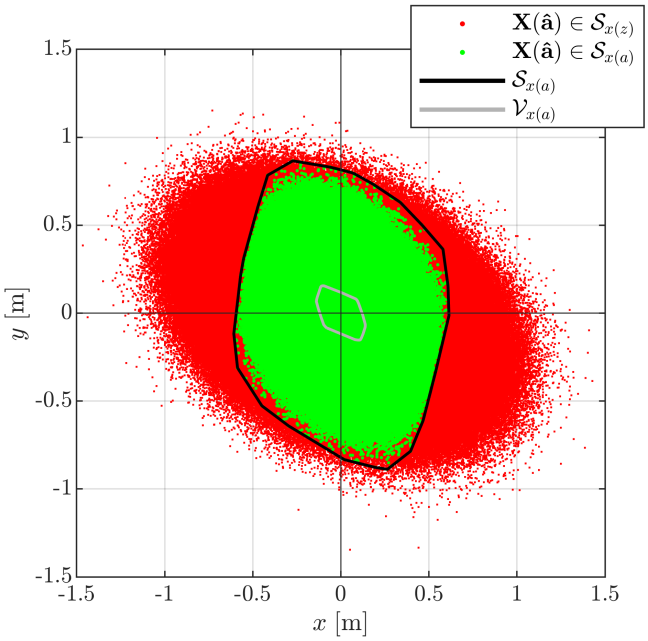
gdzie $\check{\underline{\mathbf{b}}} \in \mathbb{R}^p$ jest estymatorem $\mathbf{b}$, $\underline{\boldsymbol{\Delta}} = (\underline{\mathbf{y}} - \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_{r_0})/\lambda_f) - \text{round}(\underline{\mathbf{y}} - \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_{r_0})/\lambda_f)$ jest wektorem rezyduów całkowitoliczbowych nieoznaczoności, round$(\cdot)$ jest funkcją zaokrąglającą argument do najbliższych całkowitoliczbowych wartości, $\underline{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^l$ jest nadal wektorem wyrazów wolnych jednak dotyczy w (32) wyłącznie podwójnie zróżnicowanych obserwacji fazowych wyrażonych w cyklach, $\mathbf{Q}_{yy} \in \mathbb{R}^{l\times l}$ jest ich macierzą kowariancji oraz $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{l\times p}$ jest macierzą modelową. Na tym etapie należy podkreślić, że precyzja pomiaru fazy fali nośnej jest na poziomie 0.01 cyklu. Podwójnie zróżnicowana obserwacja fazowa, która spełnia założenia modelu stochastycznego (por. (4)), powinna zatem być charakteryzowana przez błąd średni mniejszy niż 0.5 cyklu. W związku z tym, wektor całkowitoliczbowych nieoznaczoności może przyjąć postać $\mathbf{a} = \text{round}\left(\underline{\mathbf{y}} - \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_{r_0})/\lambda_f\right)$ w równaniu $\underline{\boldsymbol{\Delta}}$. Należy podkreślić, że punktem startowym w (32) była zlinearyzowana postać równania wektora błędów (Fischer i in. 2024, rozdz. 5).

Pomimo, że w kryterium (32) nie występują w sposób jawny całkowitoliczbowe nieoznaczoności tym samym wskazując, że jest to kryterium MNK, całkowitoliczbowa natura nieoznaczoności jest brana pod uwagę dzięki specjalnej konstrukcji $\underline{\boldsymbol{\Delta}}$. W związku z tym, kryterium (32) uwzględnia fakt, że estymator nieoznaczoności jest całkowitoliczbowy. Postać $\check{\underline{\mathbf{b}}}$ jest zatem następująca

$$\check{\underline{\mathbf{b}}} = \lambda_f \left(\mathbf{B}^T\mathbf{Q}_{yy}^{-1}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{Q}_{yy}^{-1}\underline{\boldsymbol{\Delta}} \tag{33}$$

zapewniając rozwiązanie globalne kryterium (32), jeśli realizacja $\check{\mathbf{b}}$ jest uwarunkowana na realizacji $\check{\mathbf{a}}$, czyli realizacji estymatora całkowitoliczbowego MNK.

Zgodnie z teorią komórek Woronoja (ang. *Voronoi Cell*) w metodzie MAFA oraz MAFA-ILS, współrzędne centrum $\mathbf{x}(\mathbf{z}) \in \mathbb{R}^p$ komórki Woronoja $\mathcal{V}_{x(z)}$ realizują całkowitoliczbowe nieoznaczoności $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^n$. Całkowitoliczbowe nieoznaczoności $\mathbf{z}$ są zatem niejawnie wyrażone w funkcji współrzędnych $\mathbf{x}(\mathbf{z})$. Koncepcja komórek Woronoja w metodzie MAFA oraz MAFA-ILS zakłada, że wypełniają one całą przestrzeń $\mathbb{R}^p$ bez zachodzenia (Nowel i in. 2018, rw. 13 i 14). Definiowane są jako unikalne zbiory wielu $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$, które przyciągane są do jednego i tego samego rozwiązania $\mathbf{x}(\mathbf{z}) \in \mathbb{R}^p$, $\mathcal{V}_{x(z)} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p \mid \mathbf{x}(\mathbf{z}) = \mathbf{F}(\mathbf{x})\}$.




Rysunek 6: Przykład komórki Woronoja rozwiązania globalnego całkowitoliczbowych nieoznaczoności pomiaru fazowego, które są poprawne, oraz odpowiadającego obszaru przyciągania (na podstawie Fischer i in. (2024, Rys. 5)).

Zbiory mogą być reprezentowane przez realizacje $\hat{\mathbf{x}}_r = \mathbf{x}_{r_0} + \hat{\mathbf{b}}$ lub $\mathbf{x}_{r_0}$. Funkcja mapująca $\mathbf{F}$ jest w istocie funkcją round$(\cdot)$, która jest charakterystyczna dla estymatora całkowitoliczbowego opartego na zaokrąglaniu do najbliższej całkowitoliczbowej wartości. W związku z tym, unikalna komórka Woronoja może zostać stworzona w oparciu o równanie $\mathbf{z} = \text{round}\left(\underline{\mathbf{y}} - \boldsymbol{\rho}\left(\underline{\hat{\mathbf{x}}}_r\right)/\lambda_f\right)$ (Fischer i in. 2024, Rys. 3). Należy również podkreślić, że dana koncepcja komórek Woronoja jest inna od obszarów przyciągania w teorii Teunissena czy komórek Woronoja w teorii Xu, gdzie odległości mierzone są w metryce macierzy kowariancji (Xu 2006). W metodzie MAFA oraz MAFA-ILS kształt komórek Woronoja zależy od geometrycznej konstrukcji pozycjonowania, podczas gdy ich rozmiar zależy od długości fali sygnału.

Uzyskanie rozwiązania globalnego całkowitoliczbowych nieoznaczoności jest fundamentalnym zadaniem metody MAFA-ILS. W związku z tym, aby zapewnić rozwiązanie globalne w przestrzeni $\mathbb{R}^p$, należy rozważyć w procedurze poszukiwania całkowitoliczbowych kandydatów z przestrzeni $\mathbb{Z}^n$. Jednakże kluczowe jest uwzględnienie tego kandydata, który zapewni rozwiązanie globalne. Należy zatem wprowadzić definicję komórki Woronoja rozwiązania globalnego, czyli komórki, której współrzędne centrum $\mathbf{x}(\mathbf{z}) \in \mathbb{R}^p$ realizują rozwiązanie globalne całkowitoliczbowych nieoznaczoności $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^n$. Współrzędne centrum tej komórki są również współrzędnymi centrum obszaru przyciągania rozwiązania globalnego $\mathcal{S}_{x(z)}$. Obszar $\mathcal{S}_{x(z)}$ jest rzutem - odwzorowaniem - oryginalnego obszaru przyciągania $\mathcal{S}_z$ z przestrzeni $\mathbb{R}^n$ w przestrzeń $\mathbb{R}^p$ w oparciu o funkcję współrzędnych $\mathbf{X}$, $\mathcal{S}_{x(z)} = \{\mathbf{x}(\mathbf{s}) \in \mathbb{R}^p,\ \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}(\mathbf{s}) = \mathbf{X}(\mathbf{s})\}$. Na Rys. 6 przedstawiono przykład komórki Woronoja rozwiązania globalnego $\mathcal{V}_{x(a)}$, które jest poprawne, oraz odpowiadającego obszaru przyciągania $\mathcal{S}_{x(a)}$, gdzie $\mathbf{x}(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^p$ są współrzędnymi centrum odpowiednio $\mathcal{V}_{x(a)}$ oraz $\mathcal{S}_{x(a)}$. Współrzędne centrum $\mathbf{x}(\mathbf{a})$ realizują rozwiązanie globalne całkowitoliczbowych

nieoznaczoności $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n$, które są poprawne. Na podstawie Rys. 6 należy dodać, że rozwiązanie globalne, które jest poprawne, nie zostanie zapewnione w metodzie MAFA-ILS, tj. $\mathbf{x}(\mathbf{z}) \neq \mathbf{x}(\mathbf{a}),\ \forall \mathbf{x}(\mathbf{s}) \notin \mathcal{S}_{x(a)}$. Jednakże, nawet jeśli $\mathbf{x}(\mathbf{s}) \in \mathcal{S}_{x(a)}$, rozwiązanie z metody MAFA-ILS może być niepoprawne, $\mathbf{x}(\mathbf{z}) \neq \mathbf{x}(\mathbf{a}),\ \exists \mathbf{x} \in \mathcal{S}_{x(a)}$. Bezpośrednią przyczyną jest fakt zachodzenia indywidualnych $\mathcal{S}_{x(z)_{u,w}}$ ze względu na rzutowanie $\mathcal{S}_{z_{u,w}}$ z przestrzeni $\mathbb{R}^n$ na przestrzeń $\mathbb{R}^p$, $u \neq w$. W konsekwencji, $\mathcal{S}_{x(z)_u}$ posiada luki, które są wypełnione $\mathbf{x}(\mathbf{s}) \in \mathcal{S}_{x(z)_w}$. Niemniej jednak, prawdopodobieństwo takiego zdarzenia jest niskie. Potwierdziła to koincydencja wyników poprawnej estymacji całkowitoliczbowej z wynikami uzyskanymi na podstawie metody LAMBDA - metoda estymacji całkowitoliczbowej w dziedzinie nieoznaczoności (Fischer i in. 2024, Tab. 2).

### 2.2.2 Regularyzacja warunkowa: podstawy teoretyczne i opis jakości

Punktem startowym jest bezpośrednia regularyzacja nieoznaczoności. W związku z tym, kryterium rozwiązania rzeczywistoliczbowego przyjmuje postać

$$\underline{\hat{\mathbf{a}}}_k = \arg\min_{a \in \mathbb{R}^n} \left\| \underline{\tilde{\mathbf{y}}} - \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{a} \right\|^2_{\tilde{Q}_{yy}} + k \left\| \mathbf{a} \right\|^2_{I_n} \tag{34}$$

gdzie $\underline{\hat{\mathbf{a}}}_k \in \mathbb{R}^n$ jest regularyzowanym estymatorem $\mathbf{a}$, $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{P}_B^{\perp}\mathbf{A}$ jest macierzą modelową pełnego rzędu $\operatorname{rank}(\tilde{\mathbf{A}}) = n$ taką, że $R(\tilde{\mathbf{A}}) \perp R(\mathbf{B})$, $\mathbf{P}_B^{\perp} = \mathbf{I}_m - \mathbf{B}\mathbf{B}^{+}$ jest operatorem rzutu ortogonalnego na przestrzeń $R(\mathbf{B})^{\perp}$, która jest ortogonalna do przestrzeni $R(\mathbf{B})$ rozpiętej przez wektory kolumnowe $\mathbf{B}$ (ang. *basis vectors*), gdzie $\mathbf{B}^{+} = \mathbf{N}_b^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{Q}_{yy}^{-1}$, $\mathbf{N}_b = \mathbf{B}^T\mathbf{Q}_{yy}^{-1}\mathbf{B}$, $\tilde{\mathbf{Q}}_{yy} = \mathbf{Q}_{yy} - \mathbf{B}\mathbf{N}_b^{-1}\mathbf{B}^T$ jest macierzą kowariancji podwójnie zróżnicowanych obserwacji.

W związku z tym, że $\underline{\tilde{\mathbf{y}}} = \mathbf{P}_B^{\perp}\underline{\mathbf{y}}$ oraz $\underline{\tilde{\epsilon}} = \mathbf{P}_B^{\perp}\underline{\epsilon}$, $\mathbf{Q}_{yy}$ została odpowiednio przeformułowana wykorzystując prawo przenoszenia się błędów średnich, otrzymując $\tilde{\mathbf{Q}}_{yy}$. Źródłem postaci $\tilde{\mathbf{Q}}_{yy}$ jest następujące liniowe równanie obserwacyjne w notacji macierzowo-wektorowej, w którym została wyeliminowana kombinacja liniowa $\mathbf{Bb}$

$$\underline{\tilde{\mathbf{y}}} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{a} + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{b} + \underline{\tilde{\epsilon}}, \quad \mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^p \tag{35}$$

w oparciu o relacje $\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{P}_B^{\perp}\mathbf{B} = \mathbf{0}$. Uzyskana $\tilde{\mathbf{Q}}_{yy}$ nie jest dodatnio określona wskazując, że macierz wag o postaci $\tilde{\mathbf{Q}}_{yy}^{-1}$ jest niedostępna. W celu uzyskania dostępnej macierzy wag, jednakże nadal w oparciu o $\tilde{\mathbf{Q}}_{yy}$, zostaje wykorzystana odwrotność Moore-Penros'a (uogólniona odwrotność) o następującej postaci (Wiśniewski 2016, rw. 1.33)

$$\tilde{\mathbf{Q}}_{yy}^{+} = \mathbf{V}_r\mathbf{\Sigma}_r^{-1}\mathbf{V}_r^T \tag{36}$$

gdzie $\mathbf{V}_r \in \mathbb{R}^{m \times r}$ jest macierzą prawych wektorów osobliwych, które są liniowo niezależne, ortonormalne oraz odpowiadają niezerowym wartościom osobliwym, $\mathbf{\Sigma}_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$ jest macierzą diagonalną niezerowych wartości osobliwych. W celu ścisłego zidentyfikowania, które wartości osobliwe są niezerowe, wykorzystano eliminację Gaussa o postaci $\tilde{\mathbf{Q}}_{yy} = \mathbf{L}\mathbf{U}$, gdzie $\mathbf{L} = \mathbf{E}^{-1}$ jest (dolną) macierzą trójkątną zawierającą współczynniki niezbędne do otrzymania postaci $\mathbf{U}$ w eliminacji Gaussa, $\mathbf{U}$ jest (górną) trójkątną macierzą

zawierającą potencjalnie piwoty (ang. *pivots*) na diagonalnej (Strang 2016, podrozdz. 2.6 i 3.2). Piwot to element wiodący danego wektora wierszowego macierzy, inaczej pierwszy niezerowy element. Następnie, można uzyskać uproszczoną postać schodkową $\mathbf{U}$, a także zredukowaną postać schodkową (ang. *reduced row echelon form*). Identyfikując piwoty, a w istocie kolumny piwotowe (ang. *pivot columns*), można stwierdzić, które wartości osobliwe są niezerowe, ponieważ niezerowe wartości osobliwe reprezentują kolumny liniowo niezależne, czyli kolumny piwotowe. Na podstawie piwotów można zatem zidentyfikować niezerowe wartości osobliwe i obliczyć (36).

Rozwiązaniem minimalizującym kryterium (34) jest estymator o następującej postaci

$$\underline{\hat{\mathbf{a}}}_k = \tilde{\mathbf{N}}_{a_k}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{Q}}_{yy}^{+} \underline{\tilde{\mathbf{y}}} \tag{37}$$

gdzie $\tilde{\mathbf{N}}_{a_k} = \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{Q}}_{yy}^{+} \tilde{\mathbf{A}} + k\mathbf{I}_n$. W związku z tym, że $\mathrm{E}\left(\underline{\hat{\mathbf{a}}}_k\right) \neq \mathbf{a}$, regularyzowany estymator w (37) jest obciążony. Opis jakości $\underline{\hat{\mathbf{a}}}_k$ zostaje zatem przeprowadzony w oparciu o $\mathbf{MSE}_{\hat{a}_k \hat{a}_k}$

$$\begin{aligned} \mathbf{MSE}_{\hat{a}_k \hat{a}_k} &= \mathbf{Q}_{\hat{a}_k \hat{a}_k} + \mathbf{g}_{\hat{a}_k} \mathbf{g}_{\hat{a}_k}^T \\ &= \tilde{\mathbf{N}}_{a_k}^{-1} \left( \sigma_0^2 \tilde{\mathbf{N}}_a + k^2 \mathbf{a}\mathbf{a}^T \right) \tilde{\mathbf{N}}_{a_k}^{-1} \end{aligned} \tag{38}$$

gdzie $\tilde{\mathbf{N}}_a = \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{Q}}_{yy}^{+} \tilde{\mathbf{A}}$. Z kolei, $\mathbf{Q}_{\hat{a}_k \hat{a}_k}$ jest regularyzowaną macierzą kowariancji

$$\mathbf{Q}_{\hat{a}_k \hat{a}_k} = \sigma_0^2 \tilde{\mathbf{N}}_{a_k}^{-1} \tilde{\mathbf{N}}_a \tilde{\mathbf{N}}_{a_k}^{-1} \tag{39}$$

opisującą poprawioną precyzję w kontekście redukcji wariancji, podczas gdy $\mathbf{g}_{\hat{a}_k}$ jest wektorem obciążenia

$$\mathbf{g}_{\hat{a}_k} = -k \tilde{\mathbf{N}}_{a_k}^{-1} \mathbf{a} \tag{40}$$

opisującym koszt, który wynika z zastosowania regularyzacji. W celu praktycznej oceny, wektor prawdziwych wartości parametrów $\mathbf{a}$ należy aproksymować wykorzystując $\underline{\hat{\mathbf{a}}}_k$ (Xu i in. 2006b).

Aby wyznaczyć parametr regularyzacji dla nieoznaczoności, kryterium minimalizacji śladu $\mathbf{MSE}_{\hat{a}_k \hat{a}_k}$ zostaje sformułowane w następujący sposób

$$k = \arg \min_{k \in \mathbb{R}} \mathrm{tr}\left( \mathbf{MSE}_{\hat{a}_k \hat{a}_k}(k) \right) \tag{41}$$

uwzględniając, że w celu aproksymacji macierzy $\mathbf{a}\mathbf{a}^T$ zostaje wykorzystana inicjalna macierz kowariancji $\mathbf{Q}_{\hat{a}_0}$ (por. (27)).

W oparciu o (37), przyrosty do współrzędnych pozycji przybliżonej mogą zostać uwarunkowane na regularyzowanych nieoznaczonościach. W związku z tym, kryterium rozwiązania rzeczywistoliczbowego przyjmuje postać

$$\underline{\hat{\mathbf{b}}}_{/\hat{a}_k} = \arg \min_{b \in \mathbb{R}^p} \left\| \left( \underline{\mathbf{y}} - \mathbf{A}\underline{\hat{\mathbf{a}}}_k \right) - \mathbf{B}\mathbf{b} \right\|_{Q_{yy}}^2 \tag{42}$$

gdzie $\underline{\hat{\mathbf{b}}}_{/\hat{a}_k} \in \mathbb{R}^p$ jest regularyzowanym estymatorem $\mathbf{b}$, który został uwarunkowany na $\underline{\hat{\mathbf{a}}}_k$,

o postaci

$$\hat{\underline{\mathbf{b}}}_{/\hat{a}_k} = \mathbf{N}_b^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{Q}_{yy}^{-1}\left(\underline{\mathbf{y}} - \mathbf{A}\hat{\underline{\mathbf{a}}}_k\right) \tag{43}$$

która zapewnia minimalizacje kryterium (42). W związku z uwarunkowaniem na $\hat{\underline{\mathbf{a}}}_k$, $\mathrm{E}(\hat{\underline{\mathbf{b}}}_{/\hat{a}_k}) \neq \mathbf{b}$, wskazując, że regularyzowany estymator w (43) jest obciążony. Opis jakości zostaje zatem przeprowadzony w oparciu o $\mathbf{MSE}_{\hat{b}_{/\hat{a}_k}\hat{b}_{/\hat{a}_k}}$. W celu uwzględnienia kowariancji między $\hat{\underline{\mathbf{b}}}_{/\hat{a}_k}$ oraz $\hat{\underline{\mathbf{a}}}_k$, zostaje sformułowana $\mathbf{MSE}_{\hat{x}_k\hat{x}_k}$

$$\begin{aligned}\mathbf{MSE}_{\hat{x}_k\hat{x}_k} &= \mathbf{Q}_{\hat{x}_k\hat{x}_k} + \mathbf{g}_{\hat{x}_k}\mathbf{g}_{\hat{x}_k}^T \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{MSE}_{\hat{a}_k\hat{a}_k} & -\mathbf{MSE}_{\hat{a}_k\hat{a}_k}\mathbf{N}_{ab}\mathbf{N}_b^{-1} \\ -\mathbf{N}_b^{-1}\mathbf{N}_{ba}\mathbf{MSE}_{\hat{a}_k\hat{a}_k} & \mathbf{MSE}_{\hat{b}_{/\hat{a}_k}\hat{b}_{/\hat{a}_k}} \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{44}$$

gdzie $\mathbf{MSE}_{\hat{b}_{/\hat{a}_k}\hat{b}_{/\hat{a}_k}} = \mathbf{N}_b^{-1}\left(\sigma_0^2\mathbf{N}_b + \mathbf{N}_{ba}\mathbf{MSE}_{\hat{a}_k\hat{a}_k}\mathbf{N}_{ab}\right)\mathbf{N}_b^{-1}$, $\mathbf{N}_{ab} = \mathbf{A}^T\mathbf{Q}_{yy}^{-1}\mathbf{B}$, $\mathbf{N}_{ba} = \mathbf{N}_{ab}^T$. Z kolei, $\mathbf{Q}_{\hat{x}_k\hat{x}_k}$ jest regularyzowaną macierzą kowariancji

$$\mathbf{Q}_{\hat{x}_k\hat{x}_k} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\hat{a}_k\hat{a}_k} & -\mathbf{Q}_{\hat{a}_k\hat{a}_k}\mathbf{N}_{ab}\mathbf{N}_b^{-1} \\ -\mathbf{N}_b^{-1}\mathbf{N}_{ba}\mathbf{Q}_{\hat{a}_k\hat{a}_k} & \mathbf{Q}_{\hat{b}_{/\hat{a}_k}\hat{b}_{/\hat{a}_k}} \end{bmatrix} \tag{45}$$

opisującą poprawioną precyzję w kontekście redukcji wariancji kosztem obciążenia

$$\mathbf{g}_{\hat{x}_k} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{\hat{a}_k} \\ \mathbf{g}_{\hat{b}_{/\hat{a}_k}} \end{bmatrix} \tag{46}$$

wynikającego z uwarunkowania przyrostów do współrzędnych pozycji przybliżonej na regularyzowanych nieoznaczonościach. Na podstawie (46) zostaje potwierdzone, że $\hat{\underline{\mathbf{b}}}_{/\hat{a}_k}$ jest obciążony wyłącznie w wyniku uwarunkowania na $\hat{\underline{\mathbf{a}}}_k$, ponieważ $\mathbf{g}_{\hat{b}_{/\hat{a}_k}} = -\mathbf{N}_b^{-1}\mathbf{N}_{ba}\mathbf{g}_{\hat{a}_k}$ nie zawiera $\mathbf{b}$.

Weryfikacja, czy $\mathrm{tr}(\mathbf{MSE}_{\hat{b}_{/\hat{a}_k}\hat{b}_{/\hat{a}_k}}) < \mathrm{tr}(\mathbf{Q}_{\hat{b}_{/\hat{a}}\hat{b}_{/\hat{a}}})$, stanowi wczesny etap praktycznej oceny skuteczności zaproponowanej metody regularyzacji warunkowej w oparciu o obserwacje symulowane. Na podstawie analizy wyników opisów jakości zostaje zaobserwowane, że średnia wartość $\mathrm{tr}(\mathbf{MSE}_{\hat{b}_{/\hat{a}_k}\hat{b}_{/\hat{a}_k}})$ jest niższa w porównaniu ze średnią wartością $\mathrm{tr}(\mathbf{Q}_{\hat{b}_{/\hat{a}}\hat{b}_{/\hat{a}}})$ (Fischer i in. 2024, Tab. 1). Jest to wynikiem poprawy precyzji analizowanej na podstawie średniej wartości $\mathrm{tr}(\mathbf{Q}_{\hat{b}_{/\hat{a}_k}\hat{b}_{/\hat{a}_k}})$. Jednakże kosztem poprawy precyzji w postaci redukcji wariancji jest obciążenie, które należy również poddać analizie. Obciążenie jest analizowane na podstawie średniej wartości $\mathrm{tr}(\mathbf{g}_{\hat{b}_{/\hat{a}_k}}\mathbf{g}_{\hat{b}_{/\hat{a}_k}})$. Pomimo, że przyrosty do współrzędnych pozycji przybliżonej nie zostają poddane regularyzacji lecz uwarunkowaniu na regularyzowanych nieoznaczonościach, obciążenie $\hat{\underline{\mathbf{b}}}_{/\hat{a}_k}$ jest dostrzegalne. Niemniej jednak, redukcja wariancji jest większa aniżeli obciążenie w każdym analizowanym wariancie. W związku z tym, koszt nie przewyższa poprawy precyzji potwierdzając, że $\mathrm{tr}(\mathbf{MSE}_{\hat{b}_{/\hat{a}_k}\hat{b}_{/\hat{a}_k}}) < \mathrm{tr}(\mathbf{Q}_{\hat{b}_{/\hat{a}}\hat{b}_{/\hat{a}}})$ w ujęciu średnim. Analiza wyników opisów jakości potwierdza się w każdym wariancie eksperymentu opartego na obserwacjach symulowanych. Warianty symulacji różnią się pod względem wielkości nominalnej precyzji pomiaru fazy fali nośnej oraz liczby obserwowanych satelitów. Wyniki uzyskane na podstawie symulacji zostają natomiast potwierdzone w ramach eksperymentu opartego na obserwacjach

rzeczywistych (Fischer i in. 2024, Rys. 17). Dodatkowo na Rys. 18 w pracy Fischer i in. (2024) przedstawiono, że wraz ze wzrostem wartości parametru regularyzacji, wartość obciążenia $\hat{\underline{\mathbf{b}}}_{/\hat{a}_k}$ wzrasta. Niemniej jednak, wzrost ten nie stwarza przeszkody w praktycznym uzyskaniu $\mathrm{tr}(\mathbf{MSE}_{\hat{b}_{/\hat{a}_k}\hat{b}_{/\hat{a}_k}}) < \mathrm{tr}(\mathbf{Q}_{\hat{b}_{/\hat{a}}\hat{b}_{/\hat{a}}})$. W związku z tym, parametr regularyzacji wyznaczany dla nieoznaczoności zapewnia korzystny kompromis między redukcją wariancji a obciążeniem $\hat{\underline{\mathbf{b}}}_{/\hat{a}_k}$ (Fischer i in. 2024, Rys. 14).

### 2.2.3 Obszar poszukiwań i ocena skuteczności

Na danym etapie należy uwzględnić, że $\hat{\underline{\mathbf{x}}}_{r_j} = \mathbf{x}_{r_0} + \hat{\underline{\mathbf{b}}}_{/\hat{a}_j}$ jest estymatorem współrzędnych pozycji odbiornika użytkownika $\mathbf{x}_r$ o macierzy kowariancji $\mathbf{Q}_{\hat{x}_{r_j}\hat{x}_{r_j}} = \mathbf{Q}_{\hat{b}_{/\hat{a}_j}\hat{b}_{/\hat{a}_j}}$.

W metodzie MAFA-ILS został zaproponowany nowy - regularyzowany - obszar poszukiwań w kształcie elipsoidy błędu $\hat{\underline{\mathbf{x}}}_{r_k}$. Celem zdefiniowania regularyzowanego obszaru poszukiwań jest uzyskanie wzrostu prawdopodobieństwa, że rozwiązanie globalne całkowitoliczbowych nieoznaczoności, niejawnie wyrażonych w funkcji współrzędnych, będzie również poprawne dla modelu (32). Na tym polega problem zdefiniowania dokładnego obszaru poszukiwań. Dotychczas wykorzystywanym obszarem poszukiwań w metodzie MAFA-ILS był sześcian (Nowel i in. 2018). Obszar poszukiwań w kształcie elipsoidy błędu współrzędnych pozycji odbiornika został natomiast zaproponowany w klasycznej metodzie MAFA (Cellmer i in. 2018).

Parametry elipsoidy błędu $\hat{\underline{\mathbf{x}}}_{r_k}$ definiują regularyzowany obszar poszukiwań w metodzie MAFA-ILS. Do parametrów elipsoidy błędu $\hat{\underline{\mathbf{x}}}_{r_k}$ zalicza się lokalizację, długości osi oraz orientację. Lokalizacja elipsoidy znajduje się w punkcie reprezentowanym przez $\hat{\underline{\mathbf{x}}}_{r_k}$. Długości osi elipsoidy wyznaczane są na podstawie informacji zawartych w $\mathbf{Q}_{\hat{x}_{r_k}\hat{x}_{r_k}}$ oraz zdefiniowanego przez użytkownika poziomu ufności $1-\alpha$, gdzie $\alpha$ jest poziomem istotności. Poziom ufności kontroluje w istocie rozmiar elipsoidy. Orientacja elipsoidy wraz z jej kształtem jest z kolei kontrolowana przez $\mathbf{Q}_{\hat{x}_{r_k}\hat{x}_{r_k}}$.

Podstawą w zdefiniowaniu regularyzowanego obszaru poszukiwań w metodzie MAFA-ILS jest $p$-wymiarowy niecentralny rozkład normalny prawdopodobieństwa $\hat{\underline{\mathbf{b}}}_{/\hat{a}_k}$

$$\hat{\underline{\mathbf{b}}}_{/\hat{a}_k} \sim \mathcal{N}_p\left(\mathbf{b}+\mathbf{g}_b,\, \mathbf{Q}_{\hat{b}_{/\hat{a}_k}\hat{b}_{/\hat{a}_k}}\right), \quad \mathbf{b}\in\mathbb{R}^p, \quad \mathbf{g}_b\in\mathbb{R}^p \tag{47}$$

gdzie $\mathbf{g}_b \in \mathbb{R}^p$ jest wektorem prawdziwego obciążenia $\hat{\underline{\mathbf{b}}}_{/\hat{a}_k}$. W związku z tym, że $\hat{\underline{\mathbf{b}}}_{/\hat{a}_k}$ jest ciągłą zmienną losową, niecentralny rozkład prawdopodobieństwa (47) zostaje opisany za pomocą funkcji gęstości

$$f_{\hat{\underline{b}}_{/\hat{a}_k}}(\mathbf{x} \mid \mathbf{b},\ \mathbf{g}_b) = (2\pi)^{-\frac{p}{2}}\sqrt{|\mathbf{Q}^{-1}_{\hat{b}_{/\hat{a}_k}\hat{b}_{/\hat{a}_k}}|}\exp\left(-\frac{1}{2}\|\mathbf{x}-\mathbf{b}-\mathbf{g}_b\|^2_{Q_{\hat{b}_{/\hat{a}_k}\hat{b}_{/\hat{a}_k}}}\right) \tag{48}$$

będącą w istocie źródłem informacji o opisie jakości $\hat{\underline{\mathbf{b}}}_{/\hat{a}_k}$. W celu praktycznej oceny jakości $\hat{\underline{\mathbf{b}}}_{/\hat{a}_k}$, wektor prawdziwego obciążenia $\mathbf{g}_b$ można aproksymować $p$ ostatnimi elementami wektora z (46), czyli wektorem $\mathbf{g}_{\hat{b}_{/\hat{a}_k}}$. Jednakże postać rozkładu (47) staje się w konsekwencji przybliżeniem niecentralnego rozkładu normalnego prawdopodobieństwa $\hat{\underline{\mathbf{b}}}_{/\hat{a}_k}$. Należy zatem być świadomym, że opis jakości $\hat{\underline{\mathbf{b}}}_{/\hat{a}_k}$ nie jest w pełni ścisły (por. (28)).

Długości osi elipsoidy błędu $\underline{\hat{\mathbf{x}}}_{r_k}$ reprezentowane są w następujący sposób

$$r_x = \sqrt{\frac{\chi^2_{1-\alpha}\left(p,\ \lambda_{g_b}\right)}{\sigma_x}},\ r_y = \sqrt{\frac{\chi^2_{1-\alpha}\left(p,\ \lambda_{g_b}\right)}{\sigma_y}},\ r_z = \sqrt{\frac{\chi^2_{1-\alpha}\left(p,\ \lambda_{g_b}\right)}{\sigma_z}} \tag{49}$$

gdzie $\chi^2_{1-\alpha}(p,\ \lambda_{g_b})$ jest wartością krytyczną dla $(1-\alpha)$ z niecentralnego rozkładu prawdopodobieństwa chi-kwadrat $\chi^2(p,\ \lambda_{g_b})$ o $p$ stopniach swobody oraz $\lambda_{g_b} = \|\mathbf{g}_b\|^2_{Q_{\hat{b}_{/\hat{a}_k}\hat{b}_{/\hat{a}_k}}}$ parametrze niecentralności (Koch 1999, podrozdz. 2.6.2; Teunissen 2001, rw. 20), $\sigma_x,\ \sigma_y,\ \sigma_z$ to wartości własne z dekompozycji wg wartości własnych $\mathbf{Q}^{-1}_{\hat{x}_{r_k}\hat{x}_{r_k}} = \mathbf{S}^T\mathbf{\Sigma}\mathbf{S}$, $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{p\times p}$ jest ortogonalną macierzą liniowo niezależnych wektorów własnych, które są ortonormalne (Strang 2016, podrozdz. 6.4), $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{p\times p}$ jest macierzą diagonalną wartości własnych. W celu praktycznej oceny, wektor prawdziwego obciążenia $\mathbf{g}_b$ jest aproksymowany w formule na parametr niecentralności wykorzystując $\mathbf{g}_{\hat{b}_{/\hat{a}_k}}$, tj. $\lambda_{g_b} = \|\mathbf{g}_{\hat{b}_{/\hat{a}_k}}\|^2_{Q_{\hat{b}_{/\hat{a}_k}\hat{b}_{/\hat{a}_k}}}$. Stanowi to bezpośrednią konsekwencję przybliżenia $\mathbf{g}_b$ w (47).

Podstawą do określenia (49) jest następująca formuła

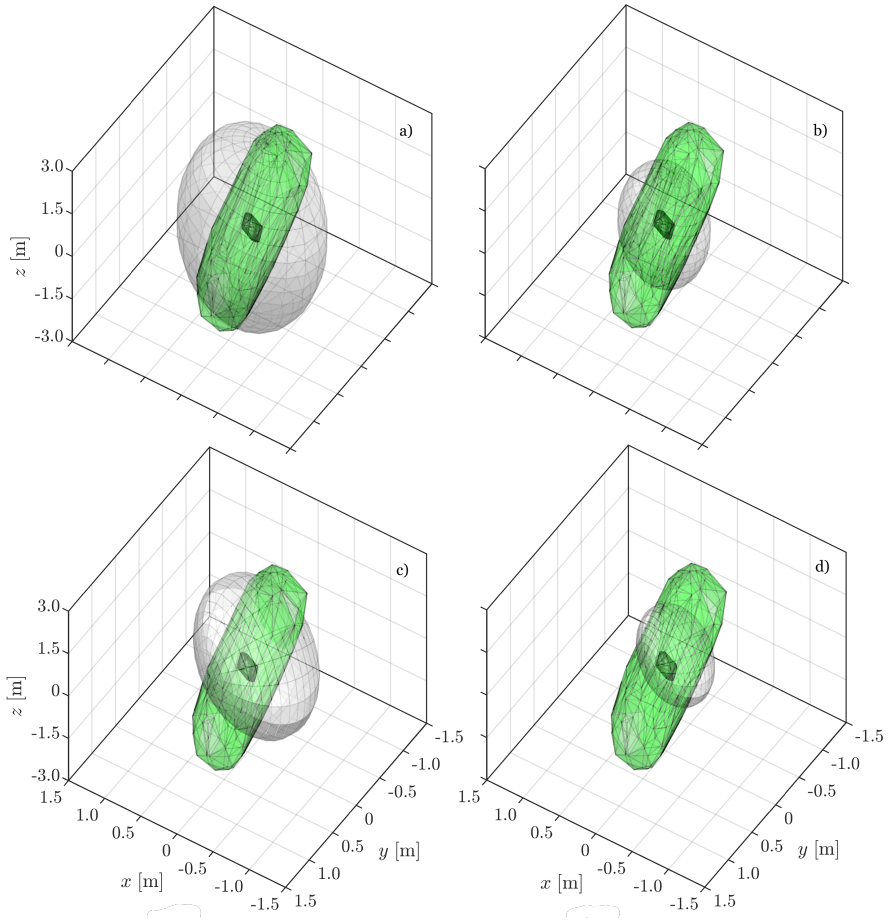
$$C^E_\alpha\left(\underline{\hat{\mathbf{x}}}_{r_k}\right) = \left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^p \;\middle|\; \|\mathbf{x}-\underline{\hat{\mathbf{x}}}_{r_k}\|^2_{Q_{\hat{x}_{r_k}\hat{x}_{r_k}}} \le \chi^2_{1-\alpha}\left(p,\ \lambda_{g_b}\right)\right\},\ \mathrm{P}\left(\mathbf{x}\in C^E_\alpha\left(\underline{\hat{\mathbf{x}}}_{r_k}\right)\right) = 1-\alpha \tag{50}$$

gdzie $C^E_\alpha\left(\underline{\hat{\mathbf{x}}}_{r_k}\right)$ jest regularyzowanym obszarem poszukiwań w kształcie elipsoidy błędu $\underline{\hat{\mathbf{x}}}_{r_k}$. Regularyzowany obszar poszukiwań jest zatem obszarem ufności dla $\mathbf{x}$, który zapewnia rozwiązanie globalne całkowitoliczbowych nieoznaczoności $\mathbf{z}$ w funkcji współrzędnych $\mathbf{x}(\mathbf{z})$. Prawdopodobieństwo, że regularyzowany obszar poszukiwań obejmuje takiego $\mathbf{x}$ jest w przybliżeniu równe $(1-\alpha)$. W celu wyrażenia kandydatów metody MAFA-ILS w lokalnym układzie współrzędnych elipsoidy błędu $\underline{\hat{\mathbf{x}}}_{r_k}$, (50) zostaje przedstawione w postaci kanonicznej

$$C^E_\alpha\left(\underline{\hat{\mathbf{x}}}_{r_k}\right) = \left\{\mathbf{x}_s\in\mathbb{R}^p \;\middle|\; \|\mathbf{x}_s\|^2_{\Sigma^{-1}} \le \chi^2_{1-\alpha}\left(p,\ \lambda_{g_b}\right)\right\},\ \mathrm{P}\left(\mathbf{x}_s\in C^E_\alpha\left(\underline{\hat{\mathbf{x}}}_{r_k}\right)\right) = 1-\alpha \tag{51}$$

gdzie $\|\mathbf{x}_s\|^2_{\Sigma^{-1}} = (\mathbf{x}-\underline{\hat{\mathbf{x}}}_{r_k})^T\mathbf{S}^T\mathbf{S}\mathbf{Q}^{-1}_{\hat{x}_{r_k}\hat{x}_{r_k}}\mathbf{S}^T\mathbf{S}(\mathbf{x}-\underline{\hat{\mathbf{x}}}_{r_k})$ oraz $\mathbf{x}_s = \mathbf{S}(\mathbf{x}-\underline{\hat{\mathbf{x}}}_{r_k})$ jest wektorem współrzędnych pozycji przybliżonej wewnątrz $C^E_\alpha\left(\underline{\hat{\mathbf{x}}}_{r_k}\right)$ wskazując, że $\frac{x_s^2}{r_x^2}+\frac{y_s^2}{r_y^2}+\frac{z_s^2}{r_z^2} < 1$. W celu transformacji do oryginalnego układu stosuje się macierz $\mathbf{S}^T$, $\mathbf{x} = \underline{\hat{\mathbf{x}}}_{r_k} + \mathbf{S}^T\mathbf{x}_s$. Wektor współrzędnych $\mathbf{x}$ jest kandydatem metody MAFA-ILS do uzyskania rozwiązania globalnego całkowitoliczbowych nieoznaczoności $\mathbf{z}$, które zostały wyrażone niejawnie w funkcji współrzędnych $\mathbf{x}(\mathbf{z})$.

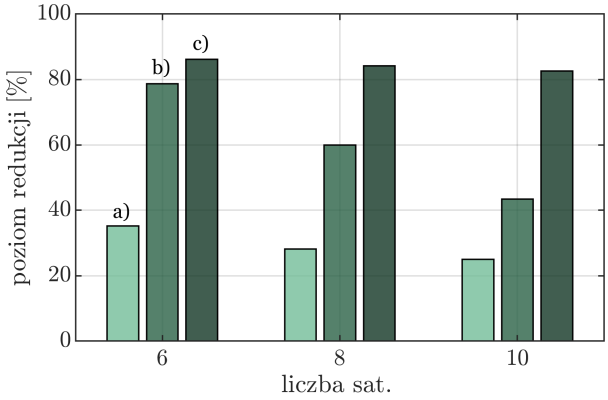
W celu przeprowadzenia procedury poszukiwania w dziedzinie współrzędnych, elipsoida błędu $\underline{\hat{\mathbf{x}}}_{r_k}$ zostaje wypełniona kandydatami, na przykład w postaci siatki grid. Na Rys. 9 w pracy Fischer i in. (2024) zostały przedstawione elipsoidy błędu $\underline{\hat{\mathbf{x}}}_{r_j}$ z siatką kandydatów. Elipsoida błędu $\underline{\hat{\mathbf{x}}}_{r_k}$ jest mniejsza, jednakże przesunięta względem $\mathrm{E}(\underline{\hat{\mathbf{b}}}_{/\hat{a}})$ w wyniku obciążenia $\underline{\hat{\mathbf{b}}}_{/\hat{a}_k}$. Optymalizacja procedury poszukiwania polega natomiast na zdefiniowaniu optymalnego kroku poszukiwań. Optymalny krok poszukiwań zapewni, że w każdej komórce Woronoja $\mathcal{V}_{x(z)}$ zostanie zlokalizowany przynajmniej jeden kandydat (Cellmer i in. 2021). W ten sposób zostanie zapewnione, że w komórce Woronoja rozwiązania globalnego całkowitoliczbowych nieoznaczoności znajduje się także jeden kandydat




Rysunek 7: Obszary poszukiwań metody MAFA-ILS w kształcie elipsoidy błędu $\underline{\hat{\mathbf{x}}}_{r_j}$: a) $j \neq k$, $\alpha = 0.001$, b) $j \neq k$, $\alpha = 0.1$, c) $j = k$, $\alpha = 0.001$, d) $j = k$, $\alpha = 0.1$. Obszary poszukiwań są w kolorze siwym, $\mathcal{S}_{x(a)}$ oraz $\mathcal{V}_{x(a)}$ rozwiązania globalnego, które jest poprawne, są odpowiednio w kolorze zielonym oraz kolorze czarnym (na podstawie Fischer i in. (2024, Rys. 10)).

pod warunkiem, że obszar poszukiwań obejmuje rozwiązanie globalne. Procedura poszukiwania odbywa się w drodze oceny wartości kryterium (32) dla każdego kandydata. W procesie oceny kryterium (32), kandydaci są rozważani jako współrzędne pozycji przybliżonej $\mathbf{x}_{r_0}$ w równaniu $\underline{\boldsymbol{\Delta}}$. Z kolei, w kontekście definicji $\mathcal{V}_{x(z)}$, kandydaci to $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$, które są przyciągane do jednego i tego samego rozwiązania $\mathbf{x}(\mathbf{z}) \in \mathbb{R}^p$. Kandydat zlokalizowany w komórce Woronoja rozwiązania globalnego zapewnia najniższą wartość kryterium (32).

Regularyzowany obszar poszukiwań metody MAFA-ILS powinien w szczególności obejmować komórkę Woronoja rozwiązania globalnego całkowitoliczbowych nieoznaczoności. Kluczowe jest zatem zdefiniowanie takiego $\alpha$ na podstawie którego elipsoida błędu $\underline{\hat{\mathbf{x}}}_{r_k}$ obejmie komórkę Woronoja rozwiązania globalnego lub przynajmniej jej część. Na Rys. 7 zostały przedstawione obszary poszukiwań w kształcie elipsoidy błędu $\underline{\hat{\mathbf{x}}}_{r_j}$, a także $\mathcal{S}_{x(a)}$ oraz $\mathcal{V}_{x(a)}$ rozwiązania globalnego, które jest poprawne. Obszar poszukiwań $j \neq k$ obejmuje $\mathcal{V}_{x(a)}$ w obu wariantach $\alpha$. W przypadku gdy $j = k$, obszar poszukiwań również obejmuje $\mathcal{V}_{x(a)}$ w obu wariantach $\alpha$. Jednakże objętość regularyzowanego obszaru poszukiwań ulega redukcji, ponieważ $\mathbf{Q}_{\hat{b}_{/\hat{a}_k}\hat{b}_{/\hat{a}_k}} < \mathbf{Q}_{\hat{b}_{/\hat{a}}\hat{b}_{/\hat{a}}}$. Obserwacja ta została potwierdzona w eksperymencie opartym na obserwacjach symulowanych, w którym rozważono trzy różne wielkości nominalnej precyzji pomiaru fazy fali nośnej (Fischer i in. 2024, Rys. 15). W re-




Rysunek 8: Poziom redukcji liczby kandydatów w procedurze poszukiwania metody MAFA-ILS w przypadku zastosowania regularyzowanego obszaru poszukiwań. Redukcja liczby kandydatów jest analizowana w zależności od wielkości nominalnej precyzji pomiaru fazy fali nośnej oraz liczby satelitów w geometrycznej konstrukcji pozycjonowania: a) $\sigma_\Phi = 0.01$ cyklu, b) $\sigma_\Phi = 0.02$ cyklu, c) $\sigma_\Phi = 0.03$ cyklu (Fischer i in. (2024, Rys. 16)).

zultacie liczba kandydatów MAFA-ILS również ulega redukcji, co bezpośrednio przekłada się na optymalizację procedury poszukiwania w dziedzinie współrzędnych. W wyniku tego, rozwiązanie globalne może zostać znalezione szybciej. Na Rys. 8 została przedstawiona redukcja liczby kandydatów w zależności od wielkości nominalnej precyzji pomiaru fazy fali nośnej oraz liczby satelitów w geometrycznej konstrukcji pozycjonowania (Fischer i in. 2024, Rys. 16). Wyniki, które zostały uzyskane w ramach eksperymentu opartego na obserwacjach symulowanych, pozwalają zatem przeprowadzić ważną, z praktycznego punktu widzenia, analizę. Redukcja liczby kandydatów wzrasta wraz ze spadkiem nominalnej precyzji pomiaru fazy fali nośnej. Wynika to ze specyfiki działania regularyzacji, która może zapewnić większą redukcję wariancji w przypadku niskiej precyzji pomiaru. W uzupełnieniu należy dodać, że liczba kandydatów nie wzrasta wraz ze wzrostem liczby satelitów w geometrycznej konstrukcji pozycjonowania. Uzasadnienie takiego wyniku jest następujące. Jeżeli procedura poszukiwania jest przeprowadzana w dziedzinie nieoznaczoności to wzrost liczby satelitów wiąże się ze wzrostem wymiaru $\mathbf{a}$. W wyniku tego, wzrasta wymiar obszaru poszukiwań, a tym samym liczba kandydatów. W podrozdz. 2.1.2 dodatkowo potwierdzono, że wraz ze wzrostem wymiaru $\mathbf{a}$ czas poszukiwań rośnie, ponieważ następuje wzrost liczby kierunków poszukiwań w dziedzinie nieoznaczoności. Natomiast przeniesienie procedury poszukiwania do dziedziny współrzędnych zapewnia stały wymiar obszaru poszukiwań, tłumacząc uzyskane wyniki. Dodatkowo, regularyzowany obszar poszukiwań zapewnia, że prawdopodobieństwo uzyskania $\mathbf{x}(\mathbf{z}) = \mathbf{x}(\mathbf{a})$ dla modelu w (32) wzrasta.

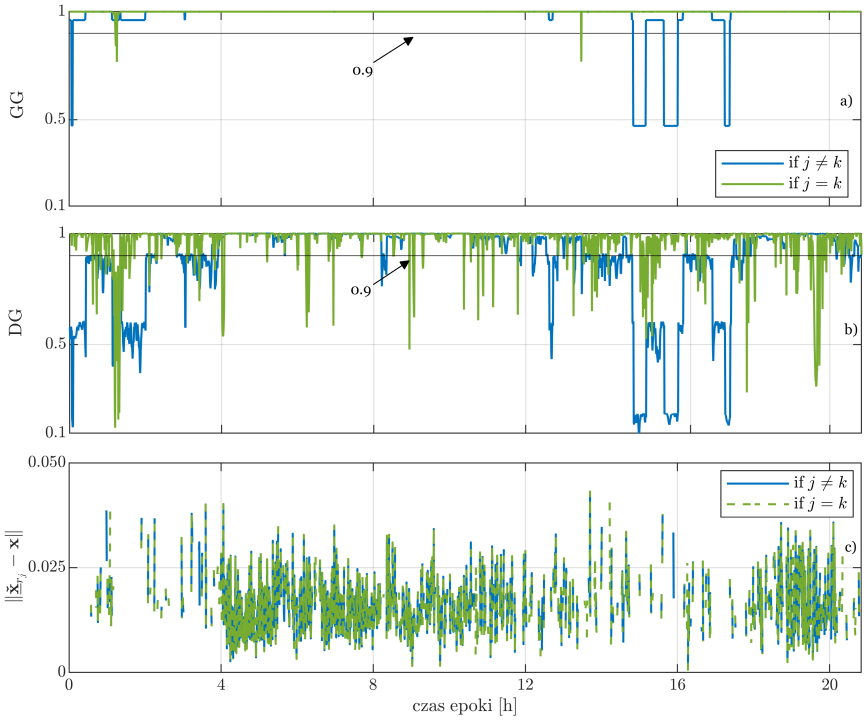
Podobnie do estymacji całkowitoliczbowej w dziedzinie nieoznaczoności, prawdopodobieństwo poprawnej estymacji całkowitoliczbowej $\mathrm{P}(\mathbf{x}(\mathbf{z}) = \mathbf{x}(\mathbf{a}))_k$ stanowi praktyczną ocenę skuteczności zaproponowanej metody regularyzacji warunkowanej. Indeks $k$ oznacza, że prawdopodobieństwo poprawnej estymacji całkowitoliczbowej w dziedzinie współrzędnych jest oceniane w przypadku zastosowania regularyzowanego obszaru poszukiwań. W Tab. 2 pracy Fischer i in. (2024) zostały przedstawione wyniki $\hat{\mathrm{P}}(\mathbf{x}(\mathbf{z}) = \mathbf{x}(\mathbf{a}))_k$, które zostały uzyskane w ramach eksperymentu opartego na obserwacjach symulowanych. Warianty eksperymentu różnią się pod względem wielkości nominalnej precyzji

pomiaru fazy fali nośnej oraz liczby satelitów w geometrycznej konstrukcji pozycjonowania. Prawdopodobieństwa zostały przybliżone w oparciu o stosunek liczby poprawnych realizacji estymatora całkowitoliczbowego $N_s$ do liczby wszystkich realizacji $N$, tj. $\hat{\mathrm{P}}(\mathbf{x}(\mathbf{z}) = \mathbf{x}(\mathbf{a}))_j \approx N_s/N$. Wyniki przedstawione w Tab. 2 pracy Fischer i in. (2024) są zbliżone do wyników uzyskanych w ramach estymacji całkowitoliczbowej w dziedzinie nieoznaczoności. W przypadku ograniczenia zbioru obserwacji na podstawie dostępności satelitów w geometrycznej konstrukcji pozycjonowania, $\hat{\mathrm{P}}(\mathbf{x}(\mathbf{z}) = \mathbf{x}(\mathbf{a}))_k$ zauważalnie wzrasta w porównaniu z $\hat{\mathrm{P}}(\mathbf{x}(\mathbf{z}) = \mathbf{x}(\mathbf{a}))$. Dodatkowo można podkreślić, że $\hat{\mathrm{P}}(\mathbf{x}(\mathbf{z}) = \mathbf{x}(\mathbf{a}))_k$ wzrasta również w odniesieniu do $\hat{\mathrm{P}}(\mathbf{x}(\mathbf{z}) = \mathbf{x}(\mathbf{a})))$ jeżeli nominalna precyzja pomiaru fazy fali nośnej spada. Obie obserwacje stanowią w istocie potwierdzenie specyfiki działania regularyzacji, której efekt jest dostrzegalny w przypadku ograniczonego zbioru obserwacji oraz niskiej precyzji pomiaru. Analiza prawdziwych błędów średnich rozwiązania współrzędnych pozycji odbiornika wskazuje na pozytywny wpływ regularyzacji warunkowej. Wartości błędów są niższe w porównaniu z błędami rozwiązania współrzędnych pozycji odbiornika bez regularyzacji. Niewątpliwie, różnica w wielkości błędów zwiększa się na korzyść regularyzacji wraz ze spadkiem precyzji pomiaru fazy fali nośnej oraz ograniczenia zbioru obserwacji.

W pracy Nowel i in. (2018, rozdz. 4) zostało podkreślone, że nie zawsze jest możliwe, aby wyznaczyć tak dokładne współrzędne pozycji przybliżonej, które będą zlokalizowane w $\mathcal{V}_{x(a)}$. W celu uzyskania wzrostu $\mathrm{P}(\mathbf{x}(\mathbf{z}) = \mathbf{x}(\mathbf{a}))$ został zaproponowany regularyzowany obszar poszukiwań w metodzie MAFA-ILS. Niemniej jednak, źródłem regularyzowanego obszaru poszukiwań jest regularyzacja warunkowa, której celem jest zwiększenie siły - wzmocnienie - modelu matematycznego (3). Zwiększenie siły modelu prowadzi natomiast do wzrostu $\mathrm{P}(\mathbf{x}(\mathbf{z}) = \mathbf{x}(\mathbf{a}))$. W związku z tym, siła modelu może zostać zmierzona na podstawie prawdopodobieństwa poprawnej estymacji całkowitoliczbowej. Jednak obliczenie tego prawdopodobieństwa, na przykład na podstawie (31), nie jest możliwe w sposób analityczny. Źródło problemu jest w dziedzinie nieoznaczoności, w której obszary całkowania $\mathcal{S}_a$ oraz $\mathcal{S}_{a_k}$ mają skomplikowaną geometrię. W celu obliczenia (31) wymagana jest zatem implementacja metody symulacji Monte Carlo. Niemniej jednak, długi czas obliczeń stwarza problem podczas praktycznej oceny siły modelu w czasie rzeczywistym. W związku z tym, zostały opracowane granice prawdopodobieństwa poprawnej estymacji całkowitoliczbowej, które przybliżają siłę modelu w czasie rzeczywistym. W przypadku klasycznego modelu matematycznego są następujące (Verhagen i in. 2013, rw. 32 i 33)

$$\prod_{i=1}^{n}\left(2\phi\left(\frac{1}{2\sigma_{\hat{a}_{i/I}}}\right)-1\right) \leq \mathrm{P}\left(\mathbf{x}\left(\mathbf{z}\right)=\mathbf{x}\left(\mathbf{a}\right)\right) \leq \mathrm{P}\left(\chi^2(n,0) \leq \frac{c_n}{\mathrm{ADOP}^2}\right) \tag{52}$$

gdzie $\sigma_{\hat{a}_{i/I}}$ to *warunkowe* odchylenie standardowe $\hat{a}_i$, $I = i-1$, $\chi^2(n,0)$ jest centralnym rozkładem prawdopodobieństwa chi-kwadrat o $n$ stopniach swobody, $c_n = (\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2}))^{\frac{2}{n}}/\pi$, $\Gamma$ jest funkcją gamma natomiast $\mathrm{ADOP} = \sqrt{|\mathbf{Q}_{\hat{a}}|}^{\frac{1}{n}}$. W przypadku regularyzowanego modelu matematycznego zostają wykorzystane granice uwzględniające wpływ obciążenia (Teunis-




Rysunek 9: Granice prawdopodobieństwa poprawnej estymacji całkowitoliczbowej: a) górna granica (GG), b) dolna granica (DG), c) odległość rozwiązania precyzyjnej pozycji odbiornika od pozycji prawdziwej (na podstawie Fischer i in. (2024, Rys. 19)).

sen 2001, rw. 21)

$$\mathrm{P}\left(\chi^2(n,\lambda_{g_a}) \leq \chi_c^2\right) \leq \mathrm{P}\left(\mathbf{x}\left(\mathbf{z}\right) = \mathbf{x}\left(\mathbf{a}\right)\right)_k \leq \phi\left(\frac{1-2\mathbf{h}^T\mathbf{g}_a}{2\left\|\mathbf{h}\right\|_{Q^{-1}_{\hat{a}_k\hat{a}_k}}}\right) + \phi\left(\frac{1+2\mathbf{h}^T\mathbf{g}_a}{2\left\|\mathbf{h}\right\|_{Q^{-1}_{\hat{a}_k\hat{a}_k}}}\right) - 1 \quad (53)$$

gdzie $\chi^2(n,\lambda_{g_a})$ jest niecentralnym rozkładem prawdopodobieństwa chi-kwadrat o $n$ stopniach swobody oraz $\lambda_{g_a} = \|\mathbf{g}_a\|^2_{Q_{\hat{a}_k\hat{a}_k}}$ parametrze niecentralności (Teunissen 2001, rw. 20), $\chi_c^2 = \frac{1}{4}\min_{z\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}}\|\mathbf{z}\|^2_{Q_{\hat{a}_k\hat{a}_k}}$ natomiast $\mathbf{h} = \frac{\mathbf{Q}^{-1}_{\hat{a}_k\hat{a}_k}\mathbf{z}}{\|\mathbf{z}\|^2_{Q_{\hat{a}_k\hat{a}_k}}}$. W celu praktycznej oceny, wektor prawdziwego obciążenia $\mathbf{g}_a$ jest aproksymowany w formule na parametr niecentralności wykorzystując $\mathbf{g}_{\hat{a}_k}$, tj. $\lambda_{g_a} = \|\mathbf{g}_{\hat{a}_k}\|^2_{Q_{\hat{a}_k\hat{a}_k}}$. Stanowi to bezpośrednią konsekwencję przybliżenia $\mathbf{g}_a$ w (28).

W ramach eksperymentu opartego na obserwacjach rzeczywistych został przygotowany Rys. 9, który składa się z trzech części. Część a) prezentuje górną granicę prawdopodobieństwa poprawnej estymacji całkowitoliczbowej (GG), część b) dolną granicę wspomnianego prawdopodobieństwa (DG), część c) odległość rozwiązania precyzyjnej pozycji odbiornika $\underline{\check{\mathbf{x}}}_{r_j} = \mathbf{x}(\mathbf{a})$ od pozycji prawdziwej $\mathbf{x}$. Przerwy w części c) wskazują z kolei na brak rozwiązania precyzyjnej pozycji odbiornika ze względu na niskie wartości GG i DG. Granice prawdopodobieństwa poprawnej estymacji całkowitoliczbowej mogą być ostrzejsze dla regularyzowanego modelu, tj. bardziej ścisłe w porównaniu z klasycznym modelem. Ostrzejsze granice są wynikiem redukcji wariancji, która determinuje, że funkcja gęstości regularyzowanego estymatora jest bardziej szczytowa (por. Rys. 4). Jednak kosztem

jest przesunięcie centrum funkcji gęstości w kierunku granicy obszaru przyciągania $\mathcal{S}_{a_k}$ ze względu na obciążenie regularyzowanego estymatora. Niemniej jednak, poprawa precyzji może przewyższać koszt jeżeli parametr regularyzacji kontroluje kompromis między redukcją wariancji a obciążeniem, potencjalnie zapewniając wzmocnienie modelu (por. rozdz. 1.2.2). Odwołując się do teorii, można to zinterpretować w następujący sposób: (ang. *In the absence of any bias, the PDF of $\hat{a}$ will be centred at $a \in Z^n$. However, when bias is present it will translate over $b$ and be centred at $a+b$. The translation over $b$ will reduce the success rate. However, if the PDF is sufficiently peaked, the success rate could still be large enough, even though the PDF is now centred at $a+b$*) (Teunissen 2001, podrozdz. 3.1). Należy zatem podkreślić, że granice prawdopodobieństwa są ostrzejsze dla regularyzowanego modelu jeżeli obciążenie jest niskie. Stanowi to praktyczne uzasadnienie dlaczego następuje wzrost siły regularyzowanego modelu. Na Rys. 20 w pracy Fischer i in. (2024) zostało przedstawione, że wraz ze wzrostem parametru niecentralności wartości GG i DG spadają. Centrum funkcji gęstości przemieszcza się zatem w kierunku granicy obszaru przyciągania $\mathcal{S}_{a_k}$, obniżając prawdopodobieństwo poprawnej estymacji całkowitoliczbowej. W związku z tym, spada ostrość granic prawdopodobieństwa dla regularyzowanego modelu jeżeli obciążenie jest wysokie. Stanowi to praktyczne uzasadnienie dlaczego następuje spadek siły regularyzowanego modelu. W związku z tym, nawet jeśli zostanie zapewniony kompromis między redukcją wariancji a obciążeniem, obciążenie może nie być na tyle niskie, aby zagwarantować wzrost siły modelu. Wynika to z charakterystyki obszarów przyciągania Teunissena i jest to zgodne z teorią estymacji całkowitoliczbowej w obecności obciążenia (Teunissen 2001).

## 2.3 Walidacja regularyzowanego modelu matematycznego

W pracy Fischer i in. (2025) zaproponowano rozwiązanie problemu walidacji modelu matematycznego ze względu na koszt wynikający z zastosowania regularyzacji w zadaniu opracowania jednoepokowego zbioru obserwacji. Walidacja regularyzowanego modelu matematycznego stanowi kluczową część niniejszej pracy doktorskiej. Rozwiązanie tego problemu polegało na wdrożeniu najnowszej teorii DIA, oferując ścisły aparat matematyczny (Teunissen 2018; Teunissen 2024a). Ocena skuteczności polegała na analizie podziału przestrzeni niezamknięć (ang. *misclosure space partitioning*), która zostanie wyjaśniona w dalszej części pracy.

Istnieją różne sposoby walidacji modelu matematycznego, na przykład w oparciu o testowanie hipotez statystycznych czy selekcję modelu wykorzystując kryteria informacyjne (Lehmann i Lösler 2016; Nowel i in. 2020). W pracy Fischer i in. (2025) ograniczono się do testowania hipotez statystycznych, czyli testowania statystycznego regularyzowanych modeli matematycznych. Należy jednak podkreślić, że zaproponowane rozwiązanie może zostać również wykorzystane w kryteriach informacyjnych.

Walidacja modelu matematycznego stanowi kluczowy etap w opracowaniu zbioru obserwacji. W praktyce geodezyjnej, podczas walidacji modelu stosując teorię testowania hipotez statystycznych, powszechnie mierzymy się z hipotezami złożonymi (ang. *composite hypotheses*). W przeciwieństwie do ich prostych odpowiedników (ang. *simple hypotheses*),

hipotezy złożone opisują modele matematyczne, w których wymagana jest estymacja parametrów. Estymacja parametrów może zostać przeprowadzona w oparciu o regularyzację jeżeli modele matematyczne zostały rozważone jako słabo-uwarunkowane. Jednakże regularyzowana estymacja, która w istocie jest obciążoną estymacją, nie wywodzi się ściśle z estymacji MNW. Regularyzowane estymatory parametrów są w konsekwencji obciążone, a tym samym niezgodne z estymatorami MNW. Estymacja MNW stanowi natomiast podstawę opracowania teorii uogólnionego testu ilorazu funkcji wiarygodności (ang. *generalized likelihood ratio test*), który jest z definicji jednostajnie najskuteczniejszym testem niezmienniczym (ang. *uniformly most powerful invariant test*). W związku z tym, istnieje praktyczny problem skonstruowania testu GLR w oparciu o regularyzowane estymatory. Odnosząc się do aktualnego stanu wiedzy oraz najnowszej literatury przedmiotu, powstała jedna praca naukowa podkreślająca ten problem i proponująca jego rozwiązanie (Li i in. 2021). W pracy Li i in. (2021) zaproponowano metodę korekcji obciążenia (ang. *bias correction*). Niemniej jednak, teoria testowania hipotez statystycznych z niej wynikająca nie gwarantuje ścisłego apartu matematycznego. Metoda korekcji obciążenia została pierwotnie opracowana przez Xu w celu oszacowania komponentów wariancyjnych w regularyzowanej estymacji (Xu i in. 2006b). W pracy Fischer i in. (2025) zaproponowano zastąpienie parametrycznej reprezentacji regularyzowanego modelu matematycznego formą, która jest oparta na równaniach warunkowych. W dalszej części pracy taka forma będzie nazywana reprezentacją niejawną ze względu na eliminację regularyzowanych estymatorów, które są źródłem obciążenia. Obciążenie stanowi natomiast koszt wynikający z zastosowania regularyzacji modelu matematycznego. Dzięki reprezentacji niejawnej zostają uzyskane niezamknięcia, które są wolne od wpływu wspomnianego obciążenia. Na ich podstawie można sformułować statystkę testu GLR, który należy do rodziny testów UMPI.

Własności testu UMPI są zachowane w przypadku przeprowadzenia indywidualnego testu GLR, w którym formułujemy jedną hipotezę alternatywną. Jako przykład można podać test globalny modelu (ang. *overall model test*) roboczego na etapie *detekcji*. Test globalny modelu stanowi specjalny przypadek testu GLR. Natomiast w procedurze testowania, w której formułujemy wiele hipotez alternatywnych, nie zostaną zachowane własności testu UMPI. Należy zatem podkreślić, że dotychczas nie zostało ściśle określone jak powinna wyglądać procedura testowania w przypadku sformułowania wielu hipotez alternatywnych. Niewątpliwie rozsądną propozycję stanowi procedura podziału przestrzeni niezamknięć lub rezyduów, która może zostać zinterpretowana jako procedura testowania (Teunissen 2024b, rozdz. 2). Dzięki procedurze podziału przestrzeni niezamknięć lub rezyduów uzyskujemy jednoznaczną relację między wynikiem testowania a wynikiem estymatora parametrów.

W rozdz. 1 pracy Fischer i in. (2025) wprowadzono do problematyki badań. W rozdz. 2 omówiono hipotezy złożone oraz teorię testu GLR wraz z procedurą testowania DIA. Kolejno, w rozdz. 3 opisano problem testowania hipotez statystycznych w przypadku zastosowania regularyzacji modelu matematycznego. Następnie, poddano analizie regularyzowane statystyki testowe, czyli statystyki, które uwzględniają wpływ obciążenia. W rozdz. 4 omówiono metodę korekcji obciążenia, która została zaproponowana przez Li i in. (2021)

w celu rozwiązania wyżej opisanego problemu. W ramach tego rozdziału poddano również analizie regularyzowane statystyki testowe skorygowane o obciążenie. W rozdz. 5 przedstawiono reprezentację niejawną modelu matematycznego dzięki której został wyeliminowany całkowity wpływ obciążenia. W ramach tego rozdziału zostały również sformułowane statystyki testowe na podstawie niezamknięć. Następnie, w rozdz. 6 przeprowadzono dwa eksperymenty numeryczne: teoretyczny (6.1) oraz praktyczny (6.2). Eksperyment teoretyczny polegał na wykorzystaniu całki Fredholma pierwszego rodzaju. Z kolei, w ramach eksperymentu praktycznego wykorzystano model matematyczny pozycjonowania absolutnego (Fischer i in. 2025, rw. 37). W związku z tym, że zaproponowane rozwiązanie problemu zostało przedstawione z uniwersalnym aparatem matematycznym, eksperyment praktyczny ograniczono do modelu pozycjonowania absolutnego. Dzięki temu, zapewniono prostszą interpretację uzyskanych wyników, ponieważ nie zachodziła potrzeba analizy tak złożonego modelu jakim niewątpliwie jest model w (3). Mimo wszystko, zostało podkreślone w rozdz. 6, że uzyskane wyniki są ogólne i zostałyby również uzyskane stosując model (3). W rozdz. 7 podsumowano pracę oraz sformułowano uniwersalne wnioski. Rozdział 3 oraz 5 są kluczowe z punktu widzenia *celu badań 3* oraz sformułowanej w ramach tego celu *hipotezy*. W wyniku tego, zostaną szczegółowo przeanalizowane i omówione. Podstawy teoretyczne regularyzowanych statystyk testowych skorygowanych o obciążenie zostały natomiast podane w rozdz. 4.

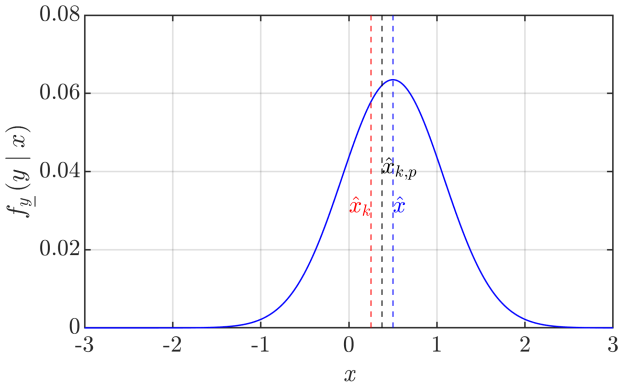
### 2.3.1 Przestrzeń rezyduów: źródło problemu

Celem testowania hipotez statycznych jest weryfikacja, czy model roboczy spełnia wymagania procedury diagnostycznej, a tym samym jest właściwy do opracowania zbioru obserwacji. Problem testowania złożonych hipotez statystycznych, czyli hipotezy zerowej względem hipotezy alternatywnej, przedstawia się następująco

$$\mathcal{H}_0 : \underline{\mathbf{y}} \sim \mathcal{N}_m\left(\mathbf{A}\mathbf{x},\ \mathbf{Q}_{yy}\right) \ vs.\ \mathcal{H}_i : \underline{\mathbf{y}} \sim \mathcal{N}_m\left(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{C}_i\mathbf{b}_i,\ \mathbf{Q}_{yy}\right) \tag{54}$$

gdzie $\mathcal{H}_0$ jest hipotezą zerową (ang. *null hypothesis*), która opisuje model roboczy, $\mathcal{H}_i$ jest hipotezą alternatywną (ang. *alternative hypothesis*), $\underline{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^m$ jest wektorem wielkości obserwowanych o $m$-wymiarowym rozkładzie normalnym prawdopodobieństwa, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ jest macierzą modelową pełnego rzędu $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = n$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem nieznanych parametrów będących przedmiotem regularyzacji, $\mathbf{C}_i \in \mathbb{R}^{m\times q}$ jest macierzą pełnego rzędu $\operatorname{rank}(\mathbf{C}_i) = q$, w której parametryzowane są obserwacje odstające, $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^q$ jest wektorem nieznanych błędów grubych, $\mathbf{Q}_{yy} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ jest dodatnio określoną macierzą kowariancji $\underline{\mathbf{y}}$. Nadliczbowość w modelu $\mathcal{H}_0$ jest równa $r = m - n$, podczas gdy w modelu $\mathcal{H}_i$ jest równa $r = m - n - q$.

Należy podkreślić, że istnieją różne rodzaje hipotez alternatywnych, które mogą się różnić od hipotezy zerowej rozkładem prawdopodobieństwa czy modelem stochastycznym. Jednakże ograniczyliśmy się do hipotez alternatywnych, które różnią się od hipotezy zerowej w parametryzacji $\mathrm{E}(\underline{\mathbf{y}})$ modelu funkcjonalnego. Precyzując, ograniczyliśmy się do *modelu przesunięcia średniej* (ang. *mean shift model*) jednocześnie będąc świadomym, że *model inflacji wariancji* (ang. *variance inflation model*) ma także praktyczne uzasadnienie




Rysunek 10: Funkcja wiarygodności danej realizacji $y = 0.5$ jako funkcja $x$ z realizacją estymatora MNK [kolor niebieski], realizacją regularyzowanego estymatora [kolor czerwony] oraz realizacją regularyzowanego estymatora skorygowanego o obciążenie [kolor czarny] (na podstawie Fischer i in. (2025, Rys. 1)).

(Lehmann 2013, rozdz. 2). Na podstawie (54) można zatem stwierdzić, że celem testowania jest podjęcie decyzji co do rozkładu prawdopodobieństwa z jakiego pochodzi realizacja $\mathbf{y}$: czy opisanego za pomocą $\mathcal{H}_0$ czy $\mathcal{H}_i$?

W literaturze przedmiotu, na przykład *Testing theory*, test GLR jest rekomendowany w celu testowania złożonych hipotez statystycznych (Teunissen 2006b). Źródłem wyprowadzenia statystyki testu GLR są postacie funkcji gęstości $\underline{\mathbf{y}}$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &: f_{\underline{y}}(\mathbf{y} \mid \mathbf{x}) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \sqrt{|\mathbf{Q}_{yy}^{-1}|} \exp\left(-\frac{1}{2}\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|^2_{Q_{yy}}\right) \\ \mathcal{H}_i &: f_{\underline{y}}(\mathbf{y} \mid \mathbf{x},\ \mathbf{b}_i) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \sqrt{|\mathbf{Q}_{yy}^{-1}|} \exp\left(-\frac{1}{2}\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{C}_i\mathbf{b}_i\|^2_{Q_{yy}}\right) \end{aligned} \tag{55}$$

odpowiednio dla $\mathcal{H}_0$ oraz $\mathcal{H}_i$. Następnie, statystka testu GLR może zostać sformułowana jako stosunek funkcji gęstości $\underline{\mathbf{y}}$ w przypadku $\mathcal{H}_0$ oraz $\mathcal{H}_i$. Niewątpliwie, regularyzowane estymatory odpowiednio dla $\mathbf{x}$ oraz $\mathbf{b}_i$ powodują, że statystyka testu GLR nie może zostać ściśle sformułowana

$$\frac{\max\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f_{\underline{y}}(\mathbf{y} \mid \mathbf{x})}{\max\limits_{x \in \mathbb{R}^n, b_i \in \mathbb{R}^q} f_{\underline{y}}(\mathbf{y} \mid \mathbf{x}, \mathbf{b}_i)} \neq \frac{f_{\underline{y}}(\mathbf{y} \mid \hat{\mathbf{x}}_{0_k})}{f_{\underline{y}}\left(\mathbf{y} \mid \hat{\mathbf{x}}_{i_k}, \hat{\mathbf{b}}_{i_k}\right)} \tag{56}$$

gdzie $\hat{\mathbf{x}}_{0_k}$ jest realizacją regularyzowanego estymatora $\underline{\hat{\mathbf{x}}}_{0_k} \in \mathbb{R}^n$ w przypadku $\mathcal{H}_0$, podczas gdy $\hat{\mathbf{x}}_{i_k}$ oraz $\hat{\mathbf{b}}_{i_k}$ są realizacjami regularyzowanych estymatorów odpowiednio $\underline{\hat{\mathbf{x}}}_{i_k} \in \mathbb{R}^n$ oraz $\underline{\hat{\mathbf{b}}}_{i_k} \in \mathbb{R}^q$ w przypadku $\mathcal{H}_i$. Przytoczone realizacje regularyzowanych estymatorów nie maksymalizują $f_{\underline{y}}(\mathbf{y} \mid \cdot)$ dla danej realizacji $\mathbf{y}$ zarówno w przypadku $\mathcal{H}_0$ oraz $\mathcal{H}_i$. Oczywiście, regularyzowana statystyka testowa może dalej zostać wyprowadzona z prawostronnej części (56). Niemniej jednak, nie będzie to już ścisła statystyka testu GLR tylko jej przybliżenie mimo, że jest wyprowadzana na podstawie ilorazu wiarygodności (ang. *likelihood ratio*). Źródłem tego problemu jest regularyzowana estymacja, która nie wywodzi się ściśle z estymacji MNW. W przypadku rozważenia rozkładu normalnego dla $\underline{\mathbf{y}}$ w MNW, estymacja MNK z wykorzystaniem macierzy wag takiej jak $\mathbf{Q}_{yy}^{-1}$ zapewnia,

że estymatory MNK są zgodne z estymatorami MNW. W związku z tym, ich realizacje prowadzą do maksymalizacji $f_{\underline{y}}(\mathbf{y} \mid \cdot)$ zarówno w przypadku $\mathcal{H}_0$ oraz $\mathcal{H}_i$ (Fischer i in. 2025, rozdz. 2). Na Rys. 10 pokazano, że realizacja regularyzowanego estymatora $\hat{\mathbf{x}}_k$ nie maksymalizuje funkcji wiarygodności (ang. *likelihood function*) realizacji $\mathbf{y}$ w porównaniu z realizacją estymatora MNK $\hat{\mathbf{x}}$ (Fischer i in. 2025, Rys. 1). Wynika to z faktu, że regularyzowany estymator jest obciążony. Dodatkowo zostało zaprezentowane, że realizacja regularyzowanego estymatora skorygowanego o obciążenie $\hat{\mathbf{x}}_{k,p}$ również nie maksymalizuje funkcji wiarygodności realizacji $\mathbf{y}$. Prawostronna część (56), sformułowana w oparciu o realizacje regularyzowanych estymatorów skorygowanych o obciążenie, nie zapewni zatem ścisłej konstrukcji testu GLR. Analityczny dowód na to stwierdzenie został podany w rw. (17) pracy Fischer i in. (2025).

Społeczność geodetów intuicyjnie formułuje statystykę testu GLR w oparciu o rezydua. Jednakże, jeśli statystyka zostanie sformułowania w oparciu o regularyzowane rezydua, wówczas otrzymana statystyka nie będzie statystką testu GLR. Wektor regularyzowanych rezyduów $\hat{\underline{\mathbf{e}}}_k \in \mathbb{R}^m$ wraz z jego macierzą kowariancji $\mathbf{Q}_{\hat{e}_k\hat{e}_k}$ jest o następującej postaci w przypadku $\mathcal{H}_0$

$$\begin{aligned} \hat{\underline{\mathbf{e}}}_k &= \underline{\mathbf{y}} - \mathbf{A}\hat{\underline{\mathbf{x}}}_k = \mathbf{P}^{\perp}_{A_k}\underline{\mathbf{y}} \\ \mathbf{Q}_{\hat{e}_k\hat{e}_k} &= \mathbf{P}^{\perp}_{A_k}\mathbf{Q}_{yy}\mathbf{P}^{\perp^T}_{A_k} \end{aligned} \tag{57}$$

gdzie $\mathbf{P}^{\perp}_{A_k} = \mathbf{I}_m - \mathbf{A}\mathbf{A}^{+}_{k}$ nie jest operatorem rzutu ortogonalnego na przestrzeń $R(\mathbf{A})^{\perp}$, która jest ortogonalna do przestrzeni $R(\mathbf{A})$ rozpiętej przez wektory kolumnowe $\mathbf{A}$, gdzie $\mathbf{A}^{+}_{k} = \mathbf{N}^{-1}_{k}\mathbf{A}^T\mathbf{Q}^{-1}_{yy}$, $\mathbf{N}_k = \mathbf{A}^T\mathbf{Q}^{-1}_{yy}\mathbf{A} + k\mathbf{I}_n$. Dzieje się tak, ponieważ $\mathbf{P}^{\perp}_{A_k}$ rzutuje realizacje $\mathbf{y}$ na przestrzeń nieortogonalną do $R(\mathbf{A})$, czyli na przestrzeń $R(\mathbf{A})^{\not\perp}$. W związku z tym, że $\mathbf{P}^{\perp}_{A_k}$ nie jest operatorem rzutu ortogonalnego zgodnie z jego definicją (Teunissen 2006a, podrozdz. 2.5), $\mathbf{P}^{\perp}_{A_k}$ można nazwać operatorem regularyzacji tak, aby uniknąć nieporozumień. W przeciwieństwie do operatora rzutu ortogonalnego z estymacji MNK, $\mathbf{P}^{\perp}_{A_k}$ nie jest idempotentny, tj. $\mathbf{P}^{\perp}_{A_k} \neq \mathbf{P}^{\perp}_{A_k}\mathbf{P}^{\perp}_{A_k}$. Dodatkowo, $\mathbf{P}^{\perp}_{A_k}$ oraz $\mathbf{Q}_{\hat{e}_k\hat{e}_k}$ są macierzami pełnego rzędu, $\operatorname{rank}(\mathbf{P}^{\perp}_{A_k}) = m$ oraz $\operatorname{rank}(\mathbf{Q}_{\hat{e}_k\hat{e}_k}) = m$. W przeciwieństwie do estymacji MNK, regularyzowana estymacja nie odbywa się w oparciu o rzut ortogonalny realizacji $\mathbf{y}$ na $R(\mathbf{A})$ (Teunissen 2006a, podrozdz. 1.4). Geometryczna interpretacja związana z brakiem rzutu ortogonalnego została przedstawiona na Rys. 1. Należy podkreślić, że w przypadku modelu, na przykład opisanego za pomocą $\mathcal{H}_0$ w (54), w którym $\mathbf{Q}_{yy}$ nie zawiera jednorodnych *kofaktorów*, estymacja MNK odbywa się w oparciu o rzut *ukośny* (ang. *oblique projection*) realizacji $\mathbf{y}$ na $R(\mathbf{A})$ (Teunissen 2006a, Rys. 1.8 i 1.9). W takim przypadku, rzut ortogonalny odbywa się względem normalnej do elipsy, która jest zdefiniowana przez lewostronną macierz równań normalnych. W związku z tym, przedstawiona na Rys. 1 geometryczna interpretacja jest uproszczona, ponieważ przyjęto założenie jednorodnej $\mathbf{Q}_{yy}$.

W odróżnieniu od wektora rezyduów z estymacji MNK, dla którego zachodzi $\mathrm{E}(\hat{\underline{\mathbf{e}}}) = \mathbf{0}$, wartość oczekiwana wektora regularyzowanych rezyduów jest różna od zera, tj. $\mathrm{E}(\hat{\underline{\mathbf{e}}}_k) = \mathbf{g}_{\hat{e}_k}$. Wskazuje to na obciążenie, które wynika z obciążenia regularyzowanego estymatora $\hat{\underline{\mathbf{x}}}_k$, tj. $\mathrm{E}(\hat{\underline{\mathbf{x}}}_k) \neq \mathbf{x}$. Obciążenie jest konsekwencją braku rzutu ortogonalnego sugerując, że regularyzowana estymacja jest obciążoną estymacja. Wektor obciążenia jest o następującej

postaci

$$\mathbf{g}_{\hat{e}_k} = \mathrm{E}\left(\underline{\hat{\mathbf{e}}}_k\right) = \mathbf{P}_{A_k}^{\perp}\mathbf{A}\mathbf{x} \tag{58}$$

gdzie $\mathbf{x}$ jest wektorem prawdziwych wartości parametrów, który jest aproksymowany w celu praktycznej oceny wykorzystując $\underline{\hat{\mathbf{x}}}_k$, jak zasugerowano przez Xu (2006b), a także Li i in. (2021).

Procedura testowania DIA zostanie przedstawiona w oparciu o statystyki testowe sformułowane na bazie regularyzowanych rezyduów. Zaprojektowana procedura zakłada trzy etapy: *detekcja-identyfikacja-adaptacja*. Kluczowym zadaniem jest uwzględnienie wpływu obciążenia regularyzowanych rezyduów na statystyki testowe. Na etapie *detekcji*, $\mathcal{H}_0$ jest testowane względem $\mathcal{H}_i$ z (54), w której wprowadzono $q = r$ dodatkowych parametrów. Test globalny modelu $\mathcal{H}_0$ z regularyzowaną statystyką jest o następującej postaci (Li i in. 2021, rw. (26))

$$\begin{aligned} T_{k_{q=r}} &= \|\hat{\mathbf{e}}_k\|_{Q_{yy}}^2 \leq \chi^2_{1-\mathrm{P_{FA}}}\left(r,\ \lambda_{g_k}\right) \\ \lambda_{g_k} &= \mathrm{E}\left(\underline{T}_{k_{q=r}}\right) - r \\ &= k^2\mathbf{x}^T\mathbf{K}^T\mathbf{Q}_k\mathbf{x} - k^3\mathbf{x}^T\mathbf{K}^T\mathbf{Q}_k^2\mathbf{x} + k^2 tr\left(\mathbf{Q}_k^2\right) \end{aligned} \tag{59}$$

gdzie $\chi^2_{1-\mathrm{P_{FA}}}(r,\ \lambda_{g_k})$ jest wartością krytyczną dla $(1 - \mathrm{P_{FA}})$ z niecentralnego rozkładu prawdopodobieństwa chi-kwadrat $\chi^2(r,\ \lambda_{g_k})$ o $r$ stopniach swobody oraz $\lambda_{g_k}$ parametrze niecentralności, $\mathbf{Q}_k = \mathbf{N}_k^{-1}\mathbf{K}$ gdzie $\mathbf{K} = \mathbf{I}_n$; $\mathrm{P_{FA}}$ jest prawdopodobieństwem fałszywego alarmu, czyli prawdopodobieństwem popełnienia błędu pierwszego typu (Prószyński i Kwaśniak 2002). Uściślając, dotyczy to odrzucenia poprawnej $\mathcal{H}_0$. Parametr niecentralności wynika natomiast z obciążenia $\underline{\hat{\mathbf{e}}}_k$. Regularyzowana statystyka testu globalnego jest zatem o niecentralnym rozkładzie prawdopodobieństwa $\underline{T}_{k_{q=r}} \sim \chi^2\left(r,\ \lambda_{g_k}\right)$. Zgodnie z Li i in. (2021, podrozdz. 4.1), $\lambda_{g_k}$ powinien również obejmować obciążenie wynikające z aproksymacji nie uwzględniającej faktu, że $\mathbf{P}_{A_k}^{\perp}$ jest idempotenta. Wektor prawdziwych wartości parametrów $\mathbf{x}$, który występuje w formule na parametr niecentralności, należy aproksymować w celu praktycznej oceny wykorzystując $\underline{\hat{\mathbf{x}}}_k$. Niewątpliwie, parametr niecentralności nie zostanie ściśle wyznaczony. Źródłem problemu jest wektor prawdziwych wartości parametrów w (58). W konsekwencji, obciążenie nie jest rygorystycznie uwzględnione w $\lambda_{g_k}$. Podjęcie decyzji co do $\mathcal{H}_0$ na podstawie wyniku z (59) może być ryzykowne, ponieważ niecentralny rozkład prawdopodobieństwa regularyzowanej statystki testu globalnego nie jest ściśle znany.

W przypadku akceptacji $\mathcal{H}_0$, czyli zadeklarowaniu zaufania do $\mathcal{H}_0$, $\underline{\hat{\mathbf{x}}}_{0_k}$ zostaje regularyzowanym estymatorem $\mathbf{x}$. Jednakże w przypadku odrzucenia $\mathcal{H}_0$ zostaje przeprowadzona jednowymiarowa *identyfikacja*, która polega na zdiagnozowaniu najbardziej prawdopodobnego źródła błędu w modelu roboczym. W odniesieniu do Li i in. (2021, rw. (27a-28)), regularyzowana statystyka testowa jest o następującej postaci na etapie jednowymiarowej *identyfikacji*

$$\underline{w}_{i_k} = \frac{\mathbf{c}_i^T\mathbf{Q}_{yy}^{-1}\underline{\hat{\mathbf{e}}}_k}{\sqrt{\mathbf{c}_i^T\mathbf{P}_{A_k}^{\perp\,T}\mathbf{Q}_{yy}^{-1}\mathbf{P}_{A_k}^{\perp}\mathbf{c}_i}} \tag{60}$$

gdzie $\mathbf{C}_i \in \mathbb{R}^{m\times q}$ z (54) przyjmuje postać $\mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^m$ ze względu na $q = 1$. Biorąc kolejno za $i = \{1, ..., m\}$, zostaje sformułowany zbiór konwencjonalnych $\mathcal{H}_i$ w (54). W każdej $\mathcal{H}_i$

wprowadzono jeden dodatkowy parametr, tj. $q = 1$. Każda $\mathcal{H}_i$ opisuje zatem model w ramach którego parametryzowany jest pojedynczy błąd gruby, który mógł doprowadzić do odrzucenia $\mathcal{H}_0$ w (59). Technicznie rzecz biorąc, jednowymiarowa *identyfikacja* polega na wyselekcjonowaniu $\mathcal{H}_{i=j}$

$$| w_{j_k} | = \max_{i \in \{1,\ldots,m\}} (| w_{i_k} |) \tag{61}$$

dla której $|w_{i=j_k}|$ osiąga maksymalną wartość bezwzględną. W związku z tym, zostaje rozważone, że $\mathcal{H}_j$ opisuje model w ramach którego parametryzowany jest błąd gruby, który mógł doprowadzić do odrzucenia $\mathcal{H}_0$. Jednakże podjęcie decyzji co do $\mathcal{H}_j$ na podstawie wyniku z (61) jest również ryzykowane (por. (59)) ze względu na uwikłany w (61) operator regularyzacji $\mathbf{P}_{A_k}^{\perp}$. Operator ten utrudnia uzyskanie rzetelnej informacji odnośnie lokalizacji błędu grubego. Należy także podkreślić, że na etapie *identyfikacji* ograniczamy się do konwencjonalnych hipotez alternatywnych (Teunissen 2006b). Uzasadnieniem jest przedmiot badań, którym nie jest analiza złożonych procedur diagnostycznych *wykrywania* i *identyfikacji* błędów grubych. Przedmiotem badań jest walidacja modelu matematycznego ze względu na koszt wynikający z zastosowania regularyzacji.

Jeżeli $\mathcal{H}_j$ zostaje wyselekcjonowana jako nowa $\mathcal{H}_0$, następuje etap *adaptacji* wyniku regularyzowanego estymatora. W związku z tym, $\underline{\hat{\mathbf{x}}}_{j_k} \in \mathbb{R}^n$ zostaje regularyzowanym estymatorem $\mathbf{x}$. Wektor regularyzowanych rezyduów $\underline{\hat{\mathbf{e}}}_k$ łączy natomiast regularyzowane estymatory, które pochodzą z różnych hipotez, tj. $\underline{\hat{\mathbf{x}}}_{h_k}$ z $\mathcal{H}_h$ gdzie $h = \{0, i\}$, jednocześnie zawierając informację o wyniku testowania

$$\begin{aligned} \underline{\hat{b}}_{j_k} &= \mathbf{c}_{j_k}^{+} \underline{\hat{\mathbf{e}}}_k, \text{ gdzie } \mathbf{c}_{j_k}^{+} = \left( \mathbf{c}_j^T \mathbf{Q}_{yy}^{-1} \mathbf{P}_{A_k}^{\perp} \mathbf{c}_j \right)^{-1} \mathbf{c}_j^T \mathbf{Q}_{yy}^{-1} \\ \underline{\hat{\mathbf{x}}}_{j_k} &= \underline{\hat{\mathbf{x}}}_{0_k} - \mathbf{L}_{j_k} \underline{\hat{\mathbf{e}}}_k, \text{ gdzie } \mathbf{L}_{j_k} = \mathbf{A}_k^{+} \mathbf{c}_j \mathbf{c}_{j_k}^{+} \end{aligned} \tag{62}$$

gdzie $\underline{\hat{b}}_{j_k} \in \mathbb{R}$ jest regularyzowanym estymatorem $b_j$, który jest obciążony $\mathrm{E}(\underline{\hat{b}}_{j_k}) \neq b_j$. Dzięki $\mathbf{L}_{j_k}$ można zaobserwować, że regularyzowana estymacja wpływa na etap *adaptacji* zarówno poprzez $\mathbf{A}_k^{+}$, jak i poprzez $\mathbf{c}_{j_k}^{+}$. Sugeruje to, że pomimo regularyzacji parametrów będących przedmiotem zainteresowania w modelu (3), regularyzowana estymacja dodatkowo wpływa na wynik testowania, jak i na estymator dla $b_j$. Wynika to z tego, że regularyzacja zostaje zastosowana przed procedurą testowania. Należy zatem podkreślić, że procedura testowania powinna poprzedzać estymację parametrów w szczególności gdy stosowana jest regularyzowana estymacja.

### 2.3.2 Przestrzeń niezamknięć: rozwiązanie problemu

Statystyki testowe formułowane dotychczas były w oparciu o regularyzowane rezydua lub regularyzowane rezydua skorygowane o obciążenie (Li i in. 2021). Jednakże niecentralne rozkłady prawdopodobieństwa tak sformułowanych statystyk testowych nie są ściśle znane ze względu na aproksymację parametrów niecentralności. W pracy Fischer i in. (2025, rozdz. 5) zostało zaproponowane, aby zastąpić parametryczną reprezentację regularyzowanego modelu matematycznego reprezentacją niejawną, która jest równoważna mimo, że nie zawiera parametrów będących przedmiotem zainteresowania. Dzięki temu, regula-

ryzowane estymatory zostają wyeliminowane, eliminując tym samym źródło obciążenia, czyli kosztu wynikającego z zastosowania regularyzacji. Jednocześnie zostają uzyskane niezamknięcia, które są wolne od wpływu wspomnianego obciążenia. Na ich podstawie można sformułować statystyki testowe o ściśle znanych rozkładach prawdopodobieństwa. W przeciwieństwie do indywidualnego testu, który został skonstruowany na podstawie regularyzowanych rezyduów lub regularyzowanych rezyduów skorygowanych o obciążenie, indywidualny test skonstruowany na podstawie niezamknięć jest testem GLR. Jako przykład można znów przytoczyć test globalny na etapie *detekcji*, który należy do rodziny testów UMPI.

W celu uzyskania reprezentacji niejawnej zostaje skonstruowana macierz $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times r}$ pełnego rzędu $\text{rank}(\mathbf{B}) = r$. Wektory kolumnowe macierzy $\mathbf{B}$ rozpinają lewą przestrzeń zerową (ang. *left nullspace*) macierzy $\mathbf{A}$, $N(\mathbf{A}^T) = R(\mathbf{A})^{\perp}$. W rozdz. 5 pracy Fischer i in. (2025) został podany sposób skonstruowania macierzy $\mathbf{B}$ w oparciu o dekompozycje wg wartości osobliwych macierzy $\mathbf{A}$. W wyniku tego, wektory kolumnowe macierzy $\mathbf{B}$ są liniowo niezależne i stanowią ortonormalną bazę (ang. *orthonormal basis*) $N(\mathbf{A}^T)$. Skonstruowana macierz $\mathbf{B}$ zapewnia zatem, że $\mathbf{B}^T\mathbf{A} = \mathbf{0}$, ponieważ $R(\mathbf{B}) \perp R(\mathbf{A})$ gdzie $R(\mathbf{B}) = N(\mathbf{A}^T)$. Macierz $\mathbf{B}^T$ zostaje kolejno wprowadzona do (57), uzyskując

$$\mathbf{B}^T\underline{\hat{\mathbf{e}}}_k = \mathbf{B}^T\underline{\mathbf{y}},\ \mathbf{B}^T\mathbf{A}\underline{\hat{\mathbf{x}}}_k = \mathbf{0} \tag{63}$$

gdzie można zaobserwować, że regularyzowany estymator $\underline{\hat{\mathbf{x}}}_k$ został wyeliminowany. Na podstawie Teunissena (2006a, ss. 62-63), $\mathbf{B}^T\underline{\mathbf{y}} = \underline{\mathbf{t}} \wedge \underline{\mathbf{t}} = \mathbf{B}^T\underline{\hat{\mathbf{e}}} \iff \mathbf{B}^T\underline{\hat{\mathbf{e}}}_k = \underline{\mathbf{t}}$, gdzie $\underline{\mathbf{t}} \in \mathbb{R}^r$ jest wektorem niezamknięć modelu wyrażonego w postaci równań warunkowych. W porównaniu z regularyzowanymi rezyduami oraz regularyzowanymi rezyduami skorygowanymi o obciążenie, niezamknięcia są wolne od wpływu obciążenia. W konsekwencji (63) przyjmuje postać

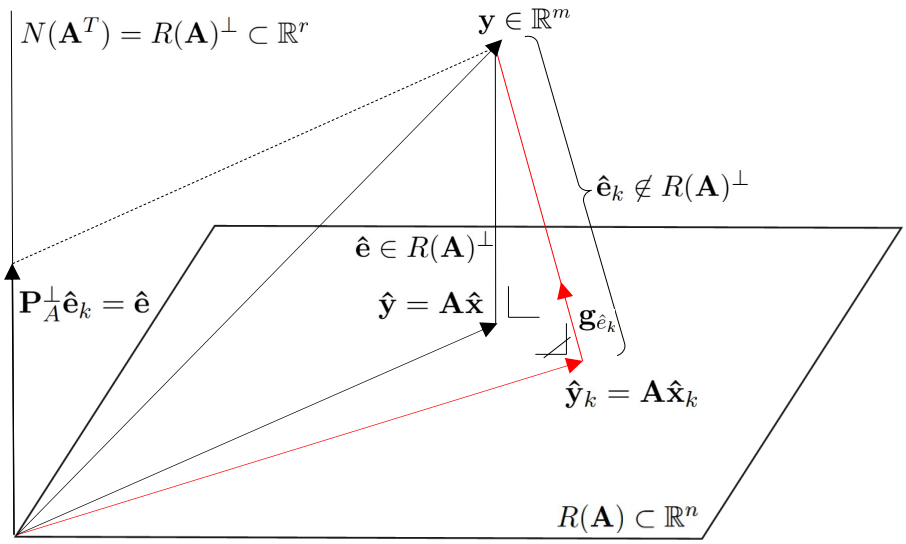
$$\mathbf{B}^T\underline{\hat{\mathbf{e}}}_k = \underline{\mathbf{t}} \tag{64}$$

gdzie $\mathbf{B}^T$ *mapuje* wektor regularyzowanych rezyduów $\underline{\hat{\mathbf{e}}}_k \in \mathbb{R}^m$ na wektor niezamknięć $\underline{\mathbf{t}} \in \mathbb{R}^r$. W wyniku tego, zostaje wyeliminowane całkowite obciążenie regularyzowanych rezyduów (por. (58)) ze względu na eliminację źródła obciążenia w (63), czyli regularyzowanego estymatora $\underline{\hat{\mathbf{x}}}_k$.

Operator regularyzacji w pierwszym równaniu (57) jest natomiast źródłem braku rzutu ortogonalnego realizacji $\mathbf{y}$ na $R(\mathbf{A})$. Relacja między operatorem regularyzacji $\mathbf{P}^{\perp}_{A_k}$ a operatorem rzutu ortogonalnego w estymacji MNK $\mathbf{P}^{\perp}_{A}$ jest kluczowa w interpretacji (63) oraz (64). Związek między $\mathbf{P}^{\perp}_{A_k}$ oraz $\mathbf{P}^{\perp}_{A}$ można przedstawić w następujący sposób. Kombinacja $\mathbf{Q}_{yy}\mathbf{B}\mathbf{Q}_{tt}^{-1}$, gdzie $\mathbf{Q}_{tt} = \mathbf{B}^T\mathbf{Q}_{yy}\mathbf{B}$, $\mathbf{Q}_{tt} \in \mathbb{R}^{r\times r}$, jest macierzą kowariancji $\underline{\mathbf{t}}$, zostaje wprowadzona do dwóch stron (64), otrzymując

$$\mathbf{P}^{\perp}_{A}\underline{\hat{\mathbf{e}}}_k = \underline{\hat{\mathbf{e}}} \tag{65}$$

gdzie wektor rezyduów z estymacji MNK jest wyrażony za pomocą $\underline{\mathbf{t}}$ oraz $\mathbf{Q}_{tt}$: $\underline{\hat{\mathbf{e}}} = \mathbf{Q}_{yy}\mathbf{B}\mathbf{Q}_{tt}^{-1}\underline{\mathbf{t}}$ (Teunissen 2006b, rw. (35)). Geometryczna interpretacja tego wyrażenia została przedstawiona na Rys. 11. W takiej postaci wektora rezyduów można dostrzec, że




Rysunek 11: Geometryczna interpretacja eliminacji obciążenia wynikającego z zastosowania regularyzacji (na podstawie Fischer i in. (2025, Rys. 2)).

operator rzutu ortogonalnego z estymacji MNK został wyrażony w formie niejawnej (ang. *implicit form*), $\mathbf{P}_A^\perp = \mathbf{P}_{Q_{yy}B} = \mathbf{Q}_{yy}\mathbf{B}\mathbf{Q}_{tt}^{-1}\mathbf{B}^T$, która jest równoważna do $\mathbf{P}_A^\perp = \mathbf{I}_m - \mathbf{A}\mathbf{A}^+$, gdzie $\mathbf{A}^+ = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{Q}_{yy}^{-1}$, $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T\mathbf{Q}_{yy}^{-1}\mathbf{A}$ (Teunissen 2006a, rw. (81)). Biorąc zatem $\underline{\hat{\mathbf{e}}}_k = \mathbf{P}_{A_k}^\perp \underline{\mathbf{y}}$ z (57) do wyrażenia $\underline{\hat{\mathbf{e}}}_k$ w (65), uzyskujemy

$$\mathbf{P}_A^\perp \mathbf{P}_{A_k}^\perp \underline{\mathbf{y}} = \underline{\hat{\mathbf{e}}} \tag{66}$$

a następnie,

$$\mathbf{P}_A^\perp \underline{\mathbf{y}} = \underline{\hat{\mathbf{e}}} \tag{67}$$

ze względu na relację $\mathbf{P}_A^\perp \mathbf{P}_{A_k}^\perp = \mathbf{P}_A^\perp$. Problem braku idempotentności $\mathbf{P}_{A_k}^\perp$ został zatem wyeliminowany poprzez przedstawioną relację z $\mathbf{P}_A^\perp$. W związku z tym, obciążenie regularyzowanych rezyduów zostało całkowicie wyeliminowane. Mimo, że regularyzowany estymator $\underline{\hat{\mathbf{x}}}_k$ został określony jako źródło obciążenia dla $\underline{\hat{\mathbf{e}}}_k$, operator regularyzacji $\mathbf{P}_{A_k}^\perp$ stanowi w istocie pierwotne źródło tego obciążenia.

Problem testowania złożonych hipotez statystycznych, czyli hipotezy zerowej względem hipotezy alternatywnej (por. (54)), może zostać przeformułowany w następujący sposób

$$\mathcal{H}_0 : \underline{\mathbf{t}} \sim \mathcal{N}_r(\mathbf{0},\ \mathbf{Q}_{tt}) \ \textit{vs.}\ \mathcal{H}_i : \underline{\mathbf{t}} \sim \mathcal{N}_r(\mathbf{C}_{t_i}\mathbf{b}_i,\ \mathbf{Q}_{tt}) \tag{68}$$

gdzie $\mathbf{C}_{t_i} = \mathbf{B}^T\mathbf{C}_i$, $\mathbf{C}_{t_i} \in \mathbb{R}^{r\times q}$. Podobnie do $\underline{\hat{\mathbf{e}}}_k$, $\underline{\mathbf{t}}$ jest również losowy lecz zawiera wyłącznie informacje, które są potrzebne do testowania statycznego bez wpływu obciążenia wynikającego z zastosowania regularyzacji. Należy mieć na uwadze, że macierz $\mathbf{B}$ nie jest unikalna. W związku z tym, wektor niezamknięć nie zostaje unikalne zdefiniowany. Niemniej jednak, nie wpływa to na wyniki testowania, ponieważ procedura testowania jest niezmiennicza w stosunku do takiej transformacji modelu (Teunissen 2018, podrozdz. 2.2.1). W przeciwieństwie do (56), statystyka testu GLR może zostać ściśle sformułowana na podstawie niezamknięć. Źródłem takiej statystyki są funkcje gęstości $\underline{\mathbf{t}}$ o następującej

postaci

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0 : f_{\underline{t}}(\mathbf{t} \mid \mathbf{0}) &= (2\pi)^{-\frac{r}{2}} \sqrt{|\mathbf{Q}_{tt}^{-1}|} \exp\left(-\frac{1}{2}\|\mathbf{t}\|^2_{Q_{tt}}\right) \\ \mathcal{H}_i : f_{\underline{t}}(\mathbf{t} \mid \mathbf{b}_i) &= (2\pi)^{-\frac{r}{2}} \sqrt{|\mathbf{Q}_{tt}^{-1}|} \exp\left(-\frac{1}{2}\|\mathbf{t} - \mathbf{C}_{t_i}\mathbf{b}_i\|^2_{Q_{tt}}\right)\end{aligned} \tag{69}$$

odpowiednio dla $\mathcal{H}_0$ oraz $\mathcal{H}_i$. W wyniku tego, statystka testu GLR zostaje sformułowana jako stosunek funkcji gęstości $\underline{\mathbf{t}}$ w przypadku $\mathcal{H}_0$ oraz $\mathcal{H}_i$

$$\frac{f_{\underline{t}}(\mathbf{t} \mid \mathbf{0})}{\max\limits_{b_i \in \mathbb{R}^q} f_{\underline{t}}(\mathbf{t} \mid \mathbf{b}_i)} = \frac{f_{\underline{t}}(\mathbf{t} \mid \mathbf{0})}{f_{\underline{t}}\left(\mathbf{t} \mid \hat{\mathbf{b}}_i\right)} \tag{70}$$

gdzie $\hat{\mathbf{b}}_i$ jest realizacją estymatora $\underline{\hat{\mathbf{b}}}_i \in \mathbb{R}^q$, która maksymalizuje $f_{\underline{t}}(\mathbf{t}|\mathbf{b}_i)$ w przypadku $\mathcal{H}_i$. Procedura testowania DIA zależy zatem od wektora niezamknięć oraz jego funkcji gęstości w przypadku $\mathcal{H}_0$. Postać funkcji gęstości jest znana w przypadku $\mathcal{H}_0$, tj. $f_{\underline{t}}(\mathbf{t}|\mathbf{0})$.

Procedura testowania DIA zostanie przedstawiona w oparciu o statystyki testowe sformułowane na bazie niezamknięć. Na etapie *detekcji*, test globalny modelu $\mathcal{H}_0$ jest następujący

$$\mathcal{P}_0 = \left\{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^r \mid \|\mathbf{t}\|^2_{Q_{tt}} \leq \chi^2_{1-\mathrm{P_{FA}}}(r,\ 0)\right\} \tag{71}$$

gdzie $\mathcal{P}_0$ jest obszarem decyzji $\mathcal{H}_0$, czyli akceptacji $\mathcal{H}_0$ jeśli $\underline{\mathbf{t}} \in \mathcal{P}_0$, $\chi^2_{1-\mathrm{P_{FA}}}(r,\ 0)$ jest wartością krytyczną dla $(1 - \mathrm{P_{FA}})$ z centralnego rozkładu prawdopodobieństwa chi-kwadrat $\chi^2(r,\ 0)$ o $r$ stopniach swobody. Statystyka testu globalnego jest zatem o centralnym rozkładzie prawdopodobieństwa $\underline{T}_{q=r} \sim \chi^2(r,\ 0)$, którego postać jest ściśle znana w przeciwieństwie do niecentralnego rozkładu prawdopodobieństwa regularyzowanej statystyki testu globalnego (por. (59)).

W przypadku akceptacji $\mathcal{H}_0$, czyli zadeklarowaniu zaufania do $\mathcal{H}_0$, $\underline{\hat{\mathbf{x}}}_{0_k}$ zostaje regularyzowanym estymatorem $\mathbf{x}$. Jednakże w przypadku odrzucenia $\mathcal{H}_0$, zostaje przeprowadzona jednowymiarowa *identyfikacja*. W związku z tym, $\mathcal{H}_j$ zostaje wyselekcjonowana jeśli $\underline{\mathbf{t}} \in \mathcal{P}_j$

$$\mathcal{P}_j = \left\{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^r / \mathcal{P}_0 \mid |w_j| = \max_{i \in \{1,\ldots,m\}} (|w_i|)\right\} \tag{72}$$

gdzie $\mathcal{P}_j$ jest obszarem decyzji $\mathcal{H}_j$, podczas gdy $w_i$ jest realizacją statystyki Baardy (1968) o postaci

$$\underline{w}_i = \|\mathbf{P}_{c_{ti}}\underline{\mathbf{t}}\|_{Q_{tt}} = \frac{\mathbf{c}_{t_i}^T \mathbf{Q}_{tt}^{-1}\underline{\mathbf{t}}}{\sqrt{\mathbf{c}_{t_i}^T \mathbf{Q}_{tt}^{-1}\mathbf{c}_{t_i}}} \tag{73}$$

gdzie $\mathbf{c}_{t_i} = \mathbf{B}^T\mathbf{c}_i$, $\mathbf{P}_{c_{ti}} = \mathbf{c}_{t_i}\left(\mathbf{c}_{t_i}^T\mathbf{Q}_{tt}^{-1}\mathbf{c}_{t_i}\right)^{-1}\mathbf{c}_{t_i}^T\mathbf{Q}_{tt}^{-1}$ jest operatorem rzutu ortogonalnego na wektor $\mathbf{c}_{t_i}$. Wektor $\mathbf{c}_{t_i} \in \mathbb{R}^r$ jest tzw. wektorem błędu (ang. *fault vector*). Inaczej mówiąc, jest wektorem bazowym obszaru $\mathcal{P}_i$ - obszaru decyzji $\mathcal{H}_i$ gdzie $i = \{1, ..., m\}$ - z wyłączeniem obszaru $\mathcal{P}_0$. Technicznie rzecz biorąc, jednowymiarowa *identyfikacja* polega na wyselekcjonowaniu $\mathcal{H}_{i=j}$ dla której wektor rzutu realizacji $\mathbf{t}$ na $\mathbf{c}_{t_{i=j}}$, $\left\|\mathbf{P}_{c_{t\,i=j}}\mathbf{t}\right\|_{Q_{tt}}$, jest najdłuższy w metryce $\mathbf{Q}_{tt}$. W związku z tym, realizacja $|w_{i=j}|$ osiąga maksymalną wartość bezwzględną. W przeciwieństwie do (60), statystka w (73) nie zawiera operatora regularyzacji $\mathbf{P}_{A_k}^{\perp}$.

Jeżeli $\underline{\mathbf{t}} \in \mathcal{P}_j$, $\mathcal{H}_j$ zostaje wyselekcjonowana jako nowa $\mathcal{H}_0$. W konsekwencji, następuje etap *adaptacji* wyniku regularyzowanego estymatora. W związku z tym, $\underline{\hat{\mathbf{x}}}_{j_k}$ zostaje regularyzowanym estymatorem $\mathbf{x}$. Wektor niezamknięć $\underline{\mathbf{t}}$ łączy regularyzowane estymatory, które pochodzą z różnych hipotez, tj. $\underline{\hat{\mathbf{x}}}_{h_k}$ z $\mathcal{H}_h$, jednocześnie zawierając informację o wyniku testowania

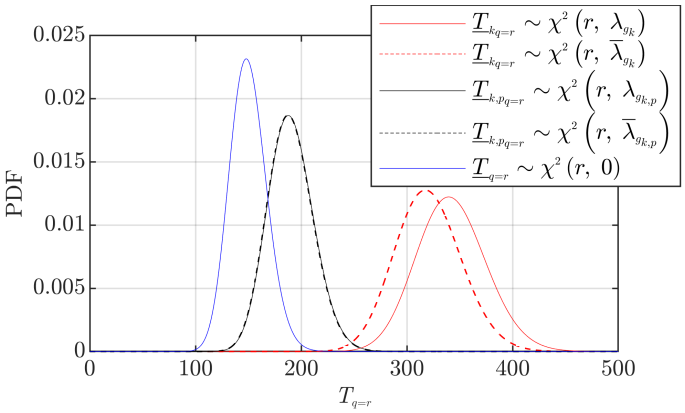
$$\begin{aligned} \underline{\hat{b}}_j &= \mathbf{c}_{t_j}^{+}\underline{\mathbf{t}}, \text{ gdzie } \mathbf{c}_{t_j}^{+} = \left(\mathbf{c}_{t_j}^{T}\mathbf{Q}_{tt}^{-1}\mathbf{c}_{t_j}\right)^{-1}\mathbf{c}_{t_j}^{T}\mathbf{Q}_{tt}^{-1} \\ \underline{\hat{\mathbf{x}}}_{j_k} &= \underline{\hat{\mathbf{x}}}_{0_k} - \mathbf{L}_{j_k}\underline{\mathbf{t}}, \text{ gdzie } \mathbf{L}_{j_k} = \mathbf{A}_k^{+}\mathbf{c}_j\mathbf{c}_{t_j}^{+} \end{aligned} \tag{74}$$

gdzie $\underline{\hat{b}}_j \in \mathbb{R}$ jest estymatorem $b_j$. W odróżnieniu od estymatora $\underline{\hat{b}}_{j_k}$ z (62), estymator $\underline{\hat{b}}_j$ z (74) jest nieobciążony, $\mathrm{E}(\underline{\hat{b}}_j) = b_j$. Natomiast w odróżnieniu od $\mathbf{L}_{j_k}$ z (62), $\mathbf{L}_{j_k}$ z (74) wskazuje, że regularyzowana estymacja wpływa na etap *adaptacji* wyłącznie poprzez $\mathbf{A}_k^{+}$. W związku z tym, regularyzacja wpływa - zgodnie z jej celem - na estymację parametrów będących przedmiotem zainteresowania, na przykład w modelu (3). Jednakże regularyzacja nie wpływa na wynik testowania oraz estymator dla $b_j$. Stanowi to niewątpliwą zaletę zastosowania reprezentacji niejawnej w przypadku regularyzacji modelu matematycznego.

Należy podkreślić, że estymator MNK parametrów będących przedmiotem zainteresowania, na przykład w modelu (3), jest nieobciążony pod warunkiem, że wynika z poprawnie sformułowanego modelu matematycznego, tj. $\mathrm{E}(\underline{\hat{\mathbf{x}}}_h|\mathcal{H}_h) = \mathbf{x}$. W takim przypadku, estymator ten jest jednocześnie estymatorem BLU. Dotyczy to również estymatora $\underline{\hat{\mathbf{b}}}_i$, $\mathrm{E}(\underline{\hat{\mathbf{b}}}_i|\mathcal{H}_i) = \mathbf{b}_i$. Regularyzowany estymator nie będzie natomiast nieobciążony nawet jeśli wynika z poprawnie sformułowanego modelu, $\mathrm{E}(\underline{\hat{\mathbf{x}}}_{h_k}|\mathcal{H}_h) \neq \mathbf{x}$. Nie dotyczy to jednak estymatora $\underline{\hat{\mathbf{b}}}_i$, który jest nieobciążony w przypadku każdej $\mathcal{H}_i$, $\mathrm{E}(\underline{\hat{\mathbf{b}}}_i|\mathcal{H}_i) = \mathbf{b}_i$. W związku z tym, $\underline{\hat{\mathbf{x}}}_k$ nie jest estymatorem BLU podczas gdy $\underline{\hat{\mathbf{b}}}_i$ jest. Jest to bardzo ważna obserwacja o naturze teoretycznej. Dzięki reprezentacji niejawnej modelu, regularyzacja wpływa wyłącznie na estymację parametrów będących przedmiotem zainteresowania. W pracy Fischer i in. (2025, rw. (34)) zostało to przedstawione na podstawie transformacji Tienstry (1956), która została wprowadzona do najnowszej teorii DIA przez Teunissena (2018; 2024a). Walidacja regularyzowanego modelu zostaje zatem przeprowadzona w oparciu o ścisły aparat matematyczny, który został zaoferowany dzięki transformacji Tienstry.

### 2.3.3 Ocena skuteczności

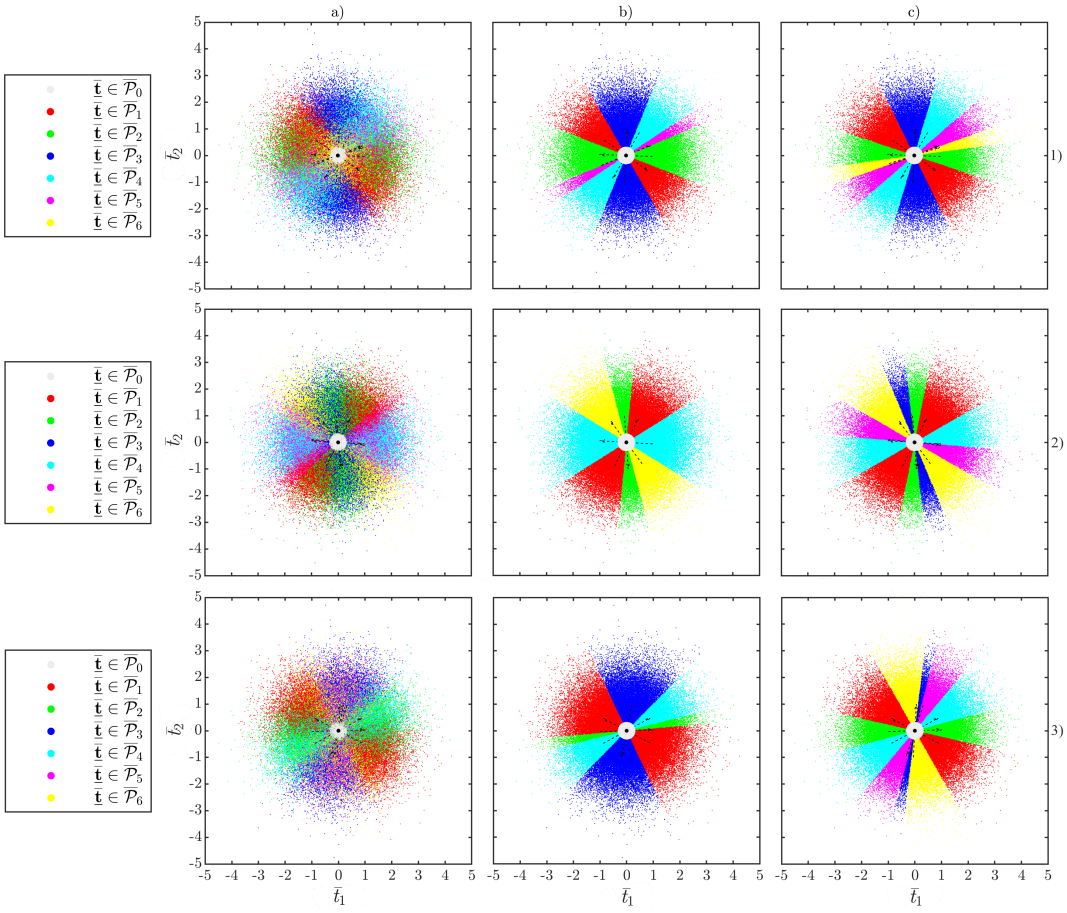
W ramach eksperymentu teoretycznego poddano analizie etap *detekcji* gdzie oceniono rozkłady prawdopodobieństwa statystyk testu globalnego. Opis eksperymentu znajduje się w podrozdz. 6.1 pracy Fischer i in. (2025). Na Rys. 12 zostały przedstawione rozkłady prawdopodobieństwa trzech statystyk testu globalnego:
a) sformułowana na podstawie regularyzowanych rezyduów statystyka testu globalnego o niecentralnym rozkładzie prawdopodobieństwa $\underline{T}_{k_{q=r}} \sim \chi^2\left(r,\ \lambda_{g_k}\right)$,
b) sformułowana na podstawie regularyzowanych rezyduów skorygowanych o obciążenie statystka testu globalnego o niecentralnym rozkładzie prawdopodobieństwa $\underline{T}_{k,p_{q=r}} \sim \chi^2\left(r,\ \lambda_{g_{k,p}}\right)$,
c) sformułowana na podstawie niezamknięć statystyka testu globalnego o centralnym rozkładzie prawdopodobieństwa $\underline{T}_{q=r} \sim \chi^2\left(r,\ 0\right)$.




Rysunek 12: Rozkłady prawdopodobieństwa statystyk testu globalnego modelu $\mathcal{H}_0$ w oparciu o funkcje gęstości: teoretyczne [linia przerywana] oraz właściwe [linia ciągła] (na podstawie Fischer i in. (2025, Rys. 3)).

Na Rys. 12 rozważono dwa rodzaje funkcji gęstości statystyk testu globalnego: teoretyczne oraz właściwe. Teoretyczne funkcje gęstości stanowią przybliżenie właściwych funkcji gęstości. Analiza teoretycznych funkcji gęstości, jak również sama ich definicja, są wzorowane na Li i in. (2021, podrozdz. 6.2). W celu uzyskania teoretycznych postaci funkcji gęstości zostały obliczone średnie wartości parametrów niecentralności, tj. $\overline{\lambda}_{g_k} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\lambda_{g_k}\left(\hat{\mathbf{x}}_{k_i}\right)$ dla wariantu a) oraz $\overline{\lambda}_{g_{k,p}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\lambda_{g_{k,p}}\left(\hat{\mathbf{x}}_{k_i}\right)$ dla wariantu b). Dodatkowo, $N$ jest liczbą symulacji z metody Monte Carlo. W wariancie b), $\lambda_{g_{k,p}}$ jest parametrem niecentralności rozkładu prawdopodobieństwa statystyki testu globalnego, która została sformułowana na podstawie regularyzowanych rezyduów skorygowanych o obciążenie. Realizacje regularyzowanego estymatora $\hat{\mathbf{x}}_{k_i}$ stanowią praktyczne przybliżenie wektora prawdziwych wartości parametrów $\mathbf{x}$. Przybliżenie to jest stosowane w formułach na parametr niecentralności, na przykład w (59) dla a) oraz rw. (19) pracy Fischer i in. (2025) dla b), w każdej symulacji $i$. W przypadku właściwych funkcji gęstości zostały wykorzystane prawdziwe wartości parametrów tak, aby obliczyć prawdziwą wartość parametru niecentralności. Linie ciągłe na Rys. 12 przedstawiają właściwe funkcje gęstości statystyk testu globalnego podczas gdy linie przerywane reprezentują teoretyczne funkcje gęstości.

Teoretyczna funkcja gęstości regularyzowanej statystyki testu globalnego stanowi słabe przybliżenie właściwej funkcji gęstości. Jest to konsekwencją wymuszonego przybliżenia wektora prawdziwych wartości parametrów w (59). Przybliżenie jest jednak konieczne w celu obliczenia wartości parametrów niecentralności w każdej symulacji. W wyniku tego, średnia wartość parametru niecentralności nie jest ściśle wyznaczona. W związku z tym, teoretyczna funkcja gęstości nie jest zgodna z właściwą funkcją gęstości regularyzowanej statystyki testu globalnego. Różnica między prawdziwą wartością parametru niecentralności a jego średnim przybliżeniem jest dostrzegalna, tj. 22.08. Metoda korekcji obciążenia udoskonala natomiast relację między teoretyczną funkcją gęstości a jej właściwą postacią. W tym przypadku, różnica między prawdziwą wartością parametru niecentralności a jego średnim przybliżeniem staje się niedostrzegalna, tj. 0.32. Niemniej jednak, teoretyczna funkcja gęstości statystyki testu globalnego, która została sformułowana na podstawie




Rysunek 13: Podział przestrzeni niezamknięć w ramach procedury testowania DIA wykorzystując: a) regularyzowane statystyki testowe, b) regularyzowane statystyki testowe skorygowane o obciążenie, c) statystyki testowe sformułowane na podstawie niezamknięć. Scenariusze dotyczące postaci modelu obserwacji w pozycjonowaniu absolutnym są oznaczone kolejno przez 1), 2) oraz 3). (na podstawie Fischer i in. (2025, Rys. 5)).

niezamknięć, jest zgodna z właściwą funkcją gęstości. Wynika to z reprezentacji niejawnej modelu, dzięki której został wyeliminowany całkowity wpływ obciążenia na formułowane statystyki testowe. W związku z tym, statystyka testu globalnego jest o centralnym rozkładzie prawdopodobieństwa. Dodatkowo, taka postać testu globalnego stanowi specjalny przypadek testu GLR wskazując, że należy do rodziny testów UMPI.

W ramach eksperymentu praktycznego poddano analizie procedurę podziału przestrzeni niezamknięć o wymiarze $\mathbb{R}^r$. Opis eksperymentu znajduje się w podrozdz. 6.2 pracy Fischer i in. (2025). Procedura podziału przestrzeni niezamknięć może zostać zinterpretowana jako procedura testowania. Niemniej jednak, procedura testowania musi zapewnić jednoznaczną relację między wynikiem testowania a wynikiem estymatora parametrów. Definicję takiej procedury testowania wprowadził Teunissen (2018, podrozdz. 2.2.2). W związku z tym, analiza procedur testowania DIA polega w danym eksperymencie na ocenie, czy została zapewniona jednoznaczna relacja między wynikiem testowania a wynikiem regularyzowanego estymatora parametrów? Ocenie zostają poddane następujące procedury testowania DIA:

a) procedura testowania z regularyzowanymi statystykami testowymi, które zostały sfor-

mułowane na podstawie regularyzowanych rezyduów,
b) procedura testowania z regularyzowanymi statystykami testowymi skorygowanymi o obciążenie, które zostały sformułowane na podstawie regularyzowanych rezyduów skorygowanych o obciążenie,
c) procedura testowania ze statystykami testowymi, które zostały sformułowane na podstawie niezamknięć.
Należy podkreślić, że procedury testowania w wariantach a) oraz b) są przeprowadzane w przestrzeni rezyduów o wymiarze $\mathbb{R}^m$. Jednakże wyniki testowania są podane w przestrzeni niezamknięć o wymiarze $\mathbb{R}^r$. Uzasadnieniem jest fakt, że wynik testowania uzyskany w przestrzeni rezyduów jest równy wynikowi testowania z przestrzeni niezamknięć. Wynika to z tego, że podział przestrzeni rezyduów jest równoważny podziałowi przestrzeni niezamknięć (Teunissen 2018, podrozdz. 2.2.2). W związku z tym w a), realizacja $\hat{\mathbf{e}}_k$ determinuje do jakiego obszaru decyzji w przestrzeni niezamknięć należy realizacja $\mathbf{t}$, tj. jeśli $\hat{\mathbf{e}}_k \in \mathcal{P}_h$ to $\mathbf{t} \in \mathcal{P}_h$, gdzie $h = \{0, i\}$ z $i = \{1, ..., m\}$. Podobnie w b), realizacja $\hat{\mathbf{e}}_{k,p}$ determinuje do jakiego obszaru decyzji w przestrzeni niezamknięć należy realizacja $\mathbf{t}$, tj. jeśli $\hat{\mathbf{e}}_{k,p} \in \mathcal{P}_h$ to $\mathbf{t} \in \mathcal{P}_h$, gdzie $\hat{\mathbf{e}}_{k,p}$ jest realizacją wektora regularyzowanych rezyduów skorygowanych o obciążenie $\underline{\hat{\mathbf{e}}}_{k,p} \in \mathbb{R}^m$. Wektor regularyzowanych rezyduów skorygowanych o obciążenie jest uzyskany dzięki metodzie korekcji obciążenia (Fischer i in. 2025, rozdz. 4).

Na Rys. 13 został przedstawiony podział dwu-wymiarowej przestrzeni niezamknięć dla trzech wariantów procedury testowania DIA, tj. a)-b)-c). Trzy różne scenariusze modelu obserwacji w pozycjonowaniu absolutnym zostały rozważone w ramach procedur testowania, tj. 1)-2)-3). Scenariusze różnią się pod względem geometrycznej konstrukcji pozycjonowania. Konstrukcje pozycjonowania zostały przedstawione na Rys. 4 w pracy Fischer i in. (2025). Zaprezentowany podział dwu-wymiarowej przestrzeni niezamknięć został przygotowany na podstawie założenia, że $\mathcal{H}_0$ jest prawdziwa oraz, że $\mathrm{P_{FA}} = 0.05$. Procedury testowania DIA zostały przeprowadzone w oparciu o test globalny modelu $\mathcal{H}_0$ oraz identyfikację źródła błędu w przypadku odrzucenia $\mathcal{H}_0$. W związku z tym, procedury testowania mogą zostać określone jako *datasnooping* w odniesieniu do literatury przedmiotu, na przykład Baarda (1968). W celu przeprowadzenia procedur testowania wykorzystano następującą postać rozkładu normalnego prawdopodobieństwa wektora niezamknięć $\mathbf{Q}_{tt}^{-1/2}\underline{\mathbf{t}} = \bar{\underline{\mathbf{t}}} \overset{\mathcal{H}_h}{\sim} \mathcal{N}_r\left(\mathbf{Q}_{tt}^{-1/2}\mathbf{c}_{t_h b_h}, \mathbf{I}_r\right)$, gdzie $\mathbf{c}_{t_h b_h} = \mathbf{0}$ dla $h = 0$. Taka postać rozkładu prawdopodobieństwa służy jedynie uproszczeniu procesu obliczeniowego oraz zapewnieniu lepszej wizualizacji otrzymanych wyników. Niemniej jednak, taka postać rozkładu prawdopodobieństwa nie wpływu na zmianę charakteru wyników.

Analizując wyniki testowania na Rys. 13 a) można dostrzec, że procedura testowania z regularyzowanymi statystykami testowymi nie gwarantuje jednoznacznego podziału przestrzeni niezamknięć. W związku z tym, dana procedura testowania nie zapewnia jednoznacznej relacji między wynikiem testowania a wynikiem regularyzowanego estymatora parametrów. W wyniku tego, zostają sformułowane następujące wnioski.

**Wniosek 1.** Obszary decyzji hipotez wypełniają przestrzeń niezamknięć o wymiarze $\mathbb{R}^r$

bez luk (i). Jednakże obszary decyzji hipotez zachodzą na siebie (ii).

$$\begin{aligned} &\text{(i)}\, \overline{\mathcal{P}}_h \subset \mathbb{R}^r,\ h = \{0,\ i\} \text{ z } i = \{1, ..., m\} \text{ oraz } \bigcup_{h=0}^{m} \overline{\mathcal{P}}_h = \mathbb{R}^r \\ &\text{(ii)}\, \overline{\mathcal{P}}_u \cap \overline{\mathcal{P}}_w \neq \{0\} \text{ dla } u \neq w \end{aligned} \tag{75}$$

W wyniku zachodzenia obszarów decyzji hipotez w przestrzeni niezamknięć, indywidualne obszary decyzji posiadają luki. Luki są natomiast wypełnione realizacjami wektora niezamknięć, które w istocie należą do innego obszaru decyzji. W wyniku tego zostaje sformułowany kolejny wniosek.

**Wniosek 2.** Pomimo, że realizacje wektora niezamknięć są zlokalizowane w konkretnym obszarze decyzji, mogą w istocie przynależeć do innego obszaru decyzji.

$$\begin{aligned} &\exists \bar{\mathbf{t}} \in \overline{\mathcal{P}}_h \text{ dla których } h \neq H\left(\bar{\mathbf{t}}\right),\ h = \{0,\ i\} \text{ z } i = \{1, ..., m\}, \\ &\text{gdzie } H:\ \mathbb{R}^r \mapsto \{h\} \end{aligned} \tag{76}$$

Mając zatem na uwadze wniosek 1 oraz 2 można stwierdzić, że procedura testowania z regularyzowanymi statystykami testowymi nie zapewnia jednoznacznej relacji między wynikiem testowania a wynikiem regularyzowanego estymatora parametrów. Bezpośrednią przyczyną jest przestrzeń rezyduów oraz wykorzystanie tam operatora regularyzacji. W związku z tym, nie można zapewnić jednoznacznej selekcji $\mathcal{H}_h$.

Analizując natomiast wyniki testowania na Rys. 13 b) można dostrzec, że procedura testowania z regularyzowanymi statystykami testowymi skorygowanymi o obciążenie zapewnia jednoznaczną postać podziału przestrzeni niezamknięć. Postać ta różni się jednak od podziału przeprowadzonego w oparciu o procedurę testowania, w której statystyki testowe sformułowane są na podstawie niezamknięć. Niemniej jednak, obie procedury testowania zapewniają jednoznaczny podział przestrzeni niezamknięć, tj. $\overline{\mathcal{P}}_h \subset \mathbb{R}^r$, $h = \{0,\ i\}$ z $i = \{1, ..., m\}$ oraz (i) $\bigcup_{h=0}^{m} \overline{\mathcal{P}}_h = \mathbb{R}^r$ razem z (ii) $\overline{\mathcal{P}}_u \cap \overline{\mathcal{P}}_w = \{0\}$ dla $u \neq w$. W wyniku tego, obszary decyzji wypełniają przestrzeń niezamknięć bez luk (i) oraz zachodzenia (ii). Na tej podstawie można jednoznacznie wyselekcjonować $\mathcal{H}_h$, jeśli $\mathbf{t} \in \mathcal{P}_h$. Procedury testowania, tj. b) oraz c), zapewniają zatem, że $h = H\left(\bar{\mathbf{t}}\right)$, $H:\ \mathbb{R}^r \mapsto \{h\}$. W związku z tym, zapewniają jednoznaczną relację między wynikiem testowania a wynikiem regularyzowanego estymatora parametrów.

Wyniki testowania uzyskane w oparciu o statystyki testowe, które zostały sformułowane na podstawie niezamknięć, są w istocie referencyjne. W przeciwieństwie do regularyzowanych rezyduów skorygowanych o obciążenie, niezamknięcia są całkowicie wolne od wpływu obciążenia. Sformułowane na ich podstawie statystyki testowe są zatem o ściśle znanych rozkładach prawdopodobieństwa. Rozkłady prawdopodobieństwa regularyzowanych statystyk testowych skorygowanych o obciążenie nie są ściśle znane (Li i in. 2021). W związku z tym, wyniki testowania z tych dwóch procedur, tj. b) oraz c), różnią się mimo, że zapewniają jednoznaczny podział przestrzeni niezamknięć.

Na Rys. 7 w pracy Fischer i in. (2025) zostało przedstawione prawdopodobieństwo poprawnego podziału przestrzeni niezamknięć jako funkcji liczby korekcji obciążenia. Jak

podano wcześniej, niezamknięcia są całkowicie wolne od wpływu obciążenia. W związku z tym, wyniki testowania, które zostały uzyskane w oparciu o statystyki testowe sformułowane na podstawie niezamknięć, stanowią punkt odniesienia. Definiują zatem poprawny podział przestrzeni niezamknięć, ponieważ podejmowane na ich podstawie decyzje są optymalne (por. (70)). Wniosek jest jeden, wraz ze wzrostem liczby korekcji obciążenia regularyzowanych rezyduów, prawdopodobieństwo poprawnego podziału wzrasta lecz nie osiąga 1. Nie zostaje zatem zapewniony poprawny podział przestrzeni niezamknięć. Wyniki testowania, które zostały uzyskane na podstawie regularyzowanych statystyk testowych skorygowanych o obciążenie, nie zawsze zapewniają optymalną decyzję (Fischer i in. 2025, rw. (18)). Kolejno zostanie omówiony powód takiego rezultatu.

Na podstawie Rys. 13 b) można również zaobserwować, że procedura testowania z regularyzowaną statystyką testową skorygowaną o obciążenie nie zapewnia identyfikacji hipotez, które są trudno identyfikowalne (ang. *poorly identifiable*). W związku z tym, ich obszary decyzji zanikają. Zgodnie z teorią podziału przestrzeni niezamknięć podanej przez Zaminpardaz i Teunissena (2019), hipoteza alternatywna staje się trudno identyfikowalna gdy wartość kąta między wektorem błędu obszaru decyzji danej hipotezy a jedną z jego prostoliniowych granic zmierza do $0^{\text{o}}$ lub $180^{\text{o}}$. Można to zinterpretować w następujący sposób. Przypuśćmy, że wartość $\mathbf{Q}_{tt}^{-1/2}\mathbf{c}_{t_j}b_j$ wzrasta w rozkładzie prawdopodobieństwa $\overline{\underline{\mathbf{t}}}$ w przypadku prawdziwej hipotezy alternatywnej $\mathcal{H}_{i=j}$ oraz $q = 1$ (por. (68)). W konsekwencji, centrum funkcji gęstości $\overline{\underline{\mathbf{t}}}$ (por. (69)) oddala się od centrum przestrzeni niezamknięć, ponieważ wartość $b_j$ wzrasta. Niemniej jednak, prawdopodobieństwo poprawnej identyfikacji $\mathcal{H}_j$ nie wzrasta dostrzegalnie, ponieważ znaczna część funkcji gęstości $\overline{\underline{\mathbf{t}}}$ nadal znajduje się poza obszarem decyzji $\mathcal{H}_j$. Wynika to z tego, że wartość kąta między wektorem błędu a jedną z prostoliniowych granic $\overline{\mathcal{P}}_j$ jest bliska $0^{\text{o}}$ lub $180^{\text{o}}$. W związku z tym, $\mathcal{H}_j$ jest trudno identyfikowalną hipotezą. W pracy Fischer i in. (2025, Tab. 1 i 2) została przeprowadzona analiza, która polegała na ocenie wartości kątów między wektorami błędów obszarów decyzji. W wyniku danej analizy zostało potwierdzone, że regularyzowana statystyka testowa skorygowana o obciążenie nie zapewnia identyfikacji hipotez, które są trudno identyfikowalne. Taka analiza odnosiła się w gruncie rzeczy do badania separowalności (ang. *separability*), w której im bliższa jest wartość kąta $0^{\text{o}}$ lub $180^{\text{o}}$, tym trudniejsza jest separowalność hipotez alternatywnych. Niewątpliwie, wartość wspomnianego kąta również zmierza do $0^{\text{o}}$ lub $180^{\text{o}}$ gdy wektor błędu obszaru decyzji zbliża się do jednej ze swoich prostoliniowych granic. W związku z tym, uzyskane wyniki są zgodne z przytoczoną wcześniej teorią. Powyższa obserwacja stanowi niewątpliwie wadę metody korekcji obciążenia. Niemniej jednak, problem ten nie występuje jeżeli statystyka testowa jest sformułowana na podstawie wolnych od obciążenia niezamknięć.

W pracy Fischer i in. (2025, podrozdz. 6.2.1) została również przeprowadzana analiza podziału trój-wymiarowej przestrzeni niezamknięć, uzyskując takie same wnioski. Dodatkowo, prawdopodobieństwa poprawnych decyzji testowych w przypadku prawdziwej hipotezy alternatywnej $\mathcal{H}_j$ zostały poddane analizie w podrozdz. 6.2.2 pracy Fischer i in. (2025). Niemniej jednak, wyniki prawdopodobieństw stanowią w istocie pochodną wyników uzyskanych w ramach podziału przestrzeni niezamknięć. Analiza podziału przestrzeni

niezamknięć w pracy Fischer i in. (2025) stanowi główne źródło oceny skuteczności zaproponowanego rozwiązania problemu walidacji regularyzowanego modelu matematycznego.

# 3 Podsumowanie i wnioski

Niniejsza rozprawa doktorska została przygotowana na podstawie jednotematycznego cyklu publikacji naukowych pt. **Analiza i doskonalenie algorytmów regularyzacji słabo-uwarunkowanego modelu matematycznego w precyzyjnym pozycjonowaniu techniką satelitarną na podstawie danych z pojedynczej epoki pomiarowej**. W skład jednotematycznego cyklu publikacji wchodzą trzy oryginalne prace naukowe. W ramach każdej pracy naukowej zaproponowano oryginalne udoskonalenie apartu matematycznego regularyzacji lub rozwiązanie problemu, który został podkreślony w dotychczasowej literaturze z zakresu podejmowanej problematyki.

W rozdz. 1 wprowadzono do problematyki badań kolejno przedstawiając: model matematyczny stanowiący podstawę do analizy algorytmów regularyzacji (1.1), przegląd podstaw teoretycznych regularyzacji (1.2.1), regularyzację modelu matematycznego (1.2.2), a następnie cel badań wraz z hipotezą (1.3). W rozdz. 2 szczegółowo omówiono problematykę, która została podjęta w ramach każdego z trzech artykułów naukowych, wyróżniając: udoskonalenie klasycznej metody regularyzacji (2.1), metoda regularyzacji warunkowanej (2.2) oraz walidacja regularyzowanego modelu matematycznego (2.3).

W ramach pierwszej publikacji naukowej zaproponowano udoskonalenie klasycznej metody regularyzacji na etapie rozwiązania rzeczywistoliczbowego (Fischer i in. 2023). Parametrami będącymi przedmiotem zainteresowania w modelu (3) były nieoznaczoności pomiaru fazowego oraz przyrosty do współrzędnych pozycji przybliżonej. W związku z tym, stanowiły one przedmiot regularyzacji w modelu (3). Aby uwzględnić odmienność dwóch grup parametrów, klasyczna metoda regularyzacji została udoskonalona na etapie rozwiązania rzeczywistoliczbowego. Udoskonalenie to polegało na zaprojektowaniu dwóch różnych parametrów regularyzacji. W wyniku tego, każda grupa parametrów będących przedmiotem zainteresowania w modelu (3) była niezależnie regularyzowana przez dedykowany im parametr regularyzacji. Następnie, została wdrożona procedura iteracyjna w celu uzyskania lepszego przybliżenia nieznanych parametrów w kryterium minimalizacji śladu macierzy MSE. Kryterium minimalizacji śladu macierzy MSE zostało zastosowane do jednoczesnego wyznaczenia dwóch różnych parametrów regularyzacji. Ocena skuteczności zaproponowanego podejścia została przeprowadzona na podstawie analizy wyników prawdopodobieństwa poprawnej estymacji całkowitoliczbowej nieoznaczoności pomiaru fazowego. Analiza wyników wskazuje na potencjał aplikacyjny zaproponowanego podejścia, ponieważ następuje wzrost prawdopodobieństwa poprawnej estymacji całkowitoliczbowej w dziedzinie nieoznaczoności przy jednoczesnym spadku czasu poszukiwania optymalnego rozwiązania całkowitoliczbowego. W związku z tym, następuje wzrost częstotliwości akceptacji rozwiązania precyzyjnej pozycji odbiornika. W odniesieniu do literatury przedmiotu, zaproponowane udoskonalenie oferuje wyniki o podobnym charakterze do tych osiągniętych na przykład w pracy Li i in. (2010) oraz Wu i Bian (2022). Niemniej jednak, wzrost prawdopodobieństwa poprawnej estymacji całkowitoliczbowej nie zawsze zapewni, że rozwiązanie całkowitoliczbowe zostanie zaakceptowane. W konsekwencji, rozwiązanie precyzyjne pozycji odbiornika nie zostanie zaoferowane użytkownikowi. W przeciwieństwie do dotychczasowych propozycji, które opierają się na jednoparametrowej regularyzacji (Li i in. 2010;

Wu i Bian 2022), udoskonalona metoda klasycznej regularyzacji oferuje w takim przypadku rozwiązanie współrzędnych pozycji odbiornika o ulepszonym opisie jakości. Uzasadnieniem jest dodatkowa regularyzacja przyrostów do współrzędnych pozycji przybliżonej. Hipoteza badawcza w ramach pierwszego celu została zatem potwierdzona: **Regularyzacja modelu matematycznego prowadzi do wzrostu prawdopodobieństwa poprawnej estymacji całkowitoliczbowej w dziedzinie nieoznaczoności pomiaru fazowego, a tym samym wpływa na wzrost częstotliwości akceptacji rozwiązania precyzyjnej pozycji odbiornika**. Należy również podkreślić, że skuteczność regularyzacji spada jeżeli zbiór obserwacyjny przestaje być ograniczony pod względem liczby dostępnych satelitów pod warunkiem, że wzrost liczby satelitów zapewnia poprawę geometrycznej konstrukcji pozycjonowania. Z praktycznego punktu widzenia, aparat matematyczny regularyzacji jest skuteczniejszy w trudnych warunkach obserwacyjnych co niewątpliwie stanowi potwierdzenie teorii regularyzacji Tikhonova (Tikhonov i Arsenin 1977).

W drugiej publikacji naukowej zaproponowano rozwiązanie problemu dokładnej definicji obszaru poszukiwań całkowitoliczbowych nieoznaczoności pomiaru fazowego w dziedzinie współrzędnych (Fischer i in. 2024). Problem dokładnej definicji obszaru poszukiwań został podkreślony w pracy Nowel i in. (2018) oraz Cellmer i in. (2018). Rozwiązanie problemu polegało na zaproponowaniu metody regularyzacji warunkowej, która udoskonala definicję obszaru poszukiwań w metodzie MAFA-ILS. Regularyzacja warunkowa polegała na wyłącznej regularyzacji nieoznaczoności na etapie rozwiązania rzeczywistoliczbowego. Współrzędne pozycji odbiornika, a w istocie przyrosty do współrzędnych pozycji przybliżonej, nie zostały poddane regularyzacji lecz uwarunkowaniu na regularyzowanych nieoznaczonościach. Dzięki propozycji regularyzacji warunkowej na etapie rozwiązania rzeczywistoliczbowego zaproponowano nowy - regularyzowany - wariant obszaru poszukiwań w metodzie MAFA-ILS. Obszar ten został zdefiniowany na podstawie wyników regularyzowanego rozwiązania rzeczywistoliczbowego. Do wyników tego rozwiązania zaliczono regularyzowane rozwiązanie współrzędnych pozycji odbiornika oraz macierz kowariancji. Należy podkreślić, że stwierdzenie regularyzowane rozwiązanie współrzędnych pozycji odbiornika odnosiło się do uwarunkowania na regularyzowanych nieoznaczonościach. Ocena skuteczności udoskonalenia związana była z analizą wzrostu prawdopodobieństwa poprawnej estymacji całkowitoliczbowej w dziedzinie współrzędnych. Analiza wyników prawdopodobieństwa poprawnej estymacji całkowitoliczbowej wskazuje na potencjał płynący z regularyzowanego obszaru poszukiwań w metodzie MAFA-ILS. Regularyzowany obszar poszukiwań częściej obejmuje rozwiązanie globalne całkowitoliczbowych nieoznaczoności, które są poprawne. Na tym polegał problem zdefiniowania dokładnego obszaru poszukiwań w metodzie MAFA-ILS. Dzięki regularyzowanemu obszarowi poszukiwań następuje wzrost prawdopodobieństwa poprawnej estymacji całkowitoliczbowej w dziedzinie współrzędnych. Dodatkowo, następuje redukcja liczby kandydatów w procedurze poszukiwania rozwiązania globalnego nieoznaczoności. Z praktycznego punktu widzenia jest to ważna obserwacja, ponieważ redukcja kandydatów w metodzie MAFA-ILS zapewnia, że rozwiązanie globalne nieoznaczoności zostanie znalezione szybciej. Hipoteza badawcza w ramach drugiego celu została zatem potwierdzona: **Regularyzacja warunkowa udoskonaliła definicję ob-**

**szaru poszukiwań całkowitoliczbowych nieoznaczoności pomiaru fazowego w metodzie MAFA-ILS, zapewniając wzrost prawdopodobieństwa poprawnej estymacji całkowitoliczbowej w dziedzinie współrzędnych.**

W trzeciej publikacji naukowej zaproponowano rozwiązanie problemu walidacji modelu matematycznego ze względu na koszt wynikający z zastosowania regularyzacji (Fischer i in. 2025). Walidacja regularyzowanego modelu matematycznego stanowiła kluczową część niniejszej pracy doktorskiej. Rozwiązanie tego problemu polegało na wdrożeniu najnowszej teorii DIA, a w istocie transformacji Tienstry (Fischer i in. 2025, rw. (34)), oferując ścisły aparat matematyczny (Teunissen 2018; Teunissen 2024a). Odnosząc się do aktualnego stanu wiedzy oraz najnowszej literatury przedmiotu, powstała jedna praca naukowa podkreślająca ten problem i proponująca jego rozwiązanie (Li i in. 2021). W pracy Li i in. (2021) zaproponowano metodę korekcji obciążenia. Niemniej jednak, teoria testowania hipotez statystycznych z niej wynikająca nie gwarantuje ścisłego apartu matematycznego. W pracy Fischer i in. (2025) zaproponowano zastąpienie parametrycznej reprezentacji regularyzowanego modelu matematycznego reprezentacją niejawną, która jest równoważna mimo, że nie zawiera parametrów będących przedmiotem zainteresowania. Dzięki temu, regularyzowane estymatory zostały wyeliminowane, eliminując tym samym źródło obciążenia. Obciążenie stanowiło natomiast koszt wynikający z zastosowania regularyzacji modelu matematycznego. Dzięki reprezentacji niejawnej zostały uzyskane niezamknięcia, które są wolne od wpływu wspomnianego obciążenia. Na ich podstawie sformułowano statystkę testu GLR, który należy do rodziny testów UMPI. Ocena skuteczności polegała na analizie rozkładów prawdopodobieństwa statystyk testu globalnego oraz podziału przestrzeni niezamknięć, która stanowi interpretację procedury testowania (Teunissen 2018, podrozdz. 2.2.2). Sformułowane na podstawie regularyzowanych rezyduów oraz regularyzowanych rezyduów skorygowanych o obciążenie statystyki testu globalnego nie są o ściśle znanych rozkładach prawdopodobieństwa ze względu na aproksymację parametru niecentralności. Parametr niecentralności wynika z obciążenia stanowiącego koszt regularyzacji. Regularyzowana statystyka testu globalnego skorygowana o obciążenie stanowi niewątpliwe udoskonalenie regularyzowanej statystyki testu globalnego. Niemniej jednak, rozkład prawdopodobieństwa statystyki testu globalnego sformułowanego na podstawie niezamknięć jest ściśle znany. Wynika to z tego, że niezamknięcia są całkowicie wolne od wpływu obciążenia w przeciwieństwie do regularyzowanych rezyduów oraz regularyzowanych rezyduów skorygowanych o obciążenie. Taka postać statystyki testu globalnego stanowi również specjalny przypadek testu GLR, który należy do rodziny testów UMPI. W przypadku podziału przestrzeni niezamknięć, procedura testowania z regularyzowanymi statystykami testowymi nie gwarantuje jednoznacznego podziału przestrzeni niezamknięć. W związku z tym, dana procedura testowania nie zapewnia jednoznacznej relacji między wynikiem testowania a wynikiem regularyzowanego estymatora parametrów. Natomiast procedura testowania z regularyzowanymi statystykami testowymi skorygowanymi o obciążenie zapewnia jednoznaczny podział. W związku z tym, zapewnia jednoznaczną relację między wynikiem testowania a wynikiem regularyzowanego estymatora parametrów. Niemniej jednak, taka postać podziału przestrzeni niezamknięć nadal różni się od postaci

uzyskanej na podstawie procedury testowania ze statystkami testowymi sformułowanymi w oparciu o niezamknięcia. Wynika to z tego, że procedura testowania z regularyzowaną statystyką testową skorygowaną o obciążenie nie zapewnia identyfikacji hipotez, które są trudno identyfikowalne. Stanowi to niewątpliwą wadę metody korekcji obciążenia. Dany problem nie występuje jeżeli statystyka testowa jest sformułowana na podstawie wolnych od obciążenia niezamknięć. W związku z tym, hipoteza badawcza w ramach trzeciego celu została potwierdzona: **Walidacja regularyzowanego modelu matematycznego powinna zostać przeprowadzona w oparciu o najnowszą teorię DIA, oferując ścisły apart matematyczny**.

Reasumując, regularyzacja modelu matematycznego zapewnia wzrost prawdopodobieństwa poprawnej estymacji całkowitoliczbowej zarówno w dziedzinie nieoznaczoności pomiaru fazowego jak i współrzędnych. W wyniku tego, następuje wzrost częstotliwości akceptacji rozwiązania precyzyjnej pozycji odbiornika w zadaniu opracowania jednoepokowego zbioru obserwacji. Należy jednak podkreślić, że skuteczność regularyzacji spada jeżeli zbiór obserwacyjny przestaje być ograniczony pod względem liczby dostępnych satelitów pod warunkiem, że wzrost liczby satelitów zapewnia poprawę geometrycznej konstrukcji pozycjonowania. Niemniej jednak, koszt, który wynika z zastosowania regularyzacji, stwarza problem w walidacji modelu matematycznego. W związku z tym, zostało zaproponowane uniwersalne rozwiązanie, które zapewnia ścisły aparat matematyczny w procedurze walidacji regularyzowanego modelu. Oprócz praktycznego rozwiązania problemu podkreślono również, że walidacja modelu powinna zawsze poprzedzać regularyzowaną estymację parametrów. Rozwiązanie problemu walidacji regularyzowanego modelu matematycznego stanowiło kluczową część niniejszej pracy doktorskiej. Wnioski, zarówno o charakterze teoretycznym jak i praktycznym, które zostały sformułowane w ramach trzech artykułów naukowych, mogą wskazywać na potencjał aplikacyjny zaproponowanych rozwiązań. W związku z tym, autor niniejszej rozprawy doktorskiej przedstawia do oceny istotność zaoferowanego wkładu w rozwój algorytmów regularyzacji.

# 4 Omówienie pozostałych osiągnięć naukowych

## 4.1 Realizacja projektów naukowych

01.10.2024 - 30.09.2027: Kierownik projektu naukowego PRELUDIUM (nr rej. 2023/49/N/ST10/00099) pt. Rygorystyczna walidacja dla regularyzowanych modeli GNSS, finansowanego przez Narodowe Centrum Nauki.
01.10.2022 - 30.09.2025: Stypendysta w projekcie naukowym SONATA (nr rej. 2021/43/D/ST10/02229) pt. Kombinatoryczna struktura DIA dla kontroli jakości opracowań danych GNSS, finansowanym przez Narodowe Centrum Nauki.
01.06.2022 - 31.07.2022: Kierownik krótkoterminowego projektu naukowego (nr rej. 57588366) pt. ang. *Real-time monitoring of river level with a low-cost GNSS receiver on a buoy*, finansowanego przez Niemiecką Centralę Wymiany Akademickiej.
01.10.2019 - 30.09.2022: Stypendysta w projekcie naukowym OPUS (nr rej. 2018/31/B/ST10/00262) pt. Analiza i doskonalenie modelu matematycznego w zadaniu precyzyjnego pozycjonowania satelitarnego na podstawie danych z pojedynczej epoki obserwacyjnej na potrzeby pomiarów deformacji w naukach o Ziemi, finansowanym przez Narodowe Centrum Nauki.

## 4.2 Współpraca międzynarodowa

02.02.2025 - 22.02.2025: staż naukowy na Uniwersytecie w Delft, Zespół Geodezji Matematycznej i Pozycjonowania (mentor: Peter J.G. Teunissen).
01.06.2022 - 31.07.2022: staż naukowy na Uniwersytecie w Bonn, Zespół Geodezji Astronomicznej, Fizycznej i Matematycznej (mentor: Makan Karegar).

## 4.3 Aktywność w organizacjach naukowych

2023 - 2027: Przedstawiciel młodych naukowców w Komisji 4, Pozycjonowanie i Zastosowania, w ramach Międzynarodowej Asocjacji Geodezji (ang. *International Association of Geodesy*).
2023 - 2027: Członek grupy roboczej WG 4.2.4, Kontrola jakości i monitoring integralności w precyzyjnym pozycjonowaniu, w ramach Międzynarodowej Asocjacji Geodezji.

# Bibliografia


Baarda, W. (1968). "A testing procedure for use in geodetic networks". W: *Netherlands Geodetic Commission, Publ. on geodesy* 2(5).

Backus, G.E. (1988). "Bayesian inference in geomagnetism". W: *Geophys. J.* 92, s. 125–142.

Belsley, D.A. (1980). *Regression Diagnostics: Identifying Influential Data and Sources of Collinearity*. Wiley: Hoboken, New Jersey.

Berger, J.O. (1985). *Statistical decision theory and Bayesian analysis*. Springer: New York.

Bisnath, S. (2021). *Position, Navigation, and Timing Technologies in the 21$^{st}$ Century (19 Relative Positioning and Real-Time Kinematic (RTK))*. Wiley: New Jersey.

Blewitt, G. (1997). *Geodetic Applications of GPS (1. Basics of the GPS Technique: Observation Equations)*. Swedish Land Survey: Gävle, Sweden.

Bosy, J. (2005). *Precyzyjne opracowanie obserwacji satelitarnych GPS w lokalnych sieciach położonych w terenach górskich*. Wydawnictwo Akademii Rolniczej: Wrocław.

Cellmer, S., K. Nowel i A. Fischer (2021). "A search step optimization in an ambiguity function-based GNSS precise positioning". W: *Survey Review* 54, s. 117–124.

Cellmer, S., K. Nowel i A. Fischer (2022). "Reduction as an improvement of a precise satellite positioning based on an ambiguity function". W: *Journal of Applied Geodesy* 16(4), s. 385–392. DOI: 10.1515/jag-2022-0005.

Cellmer, S., K. Nowel i D. Kwaśniak (2018). "The New Search Method in Precise GNSS Positioning". W: *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic System* 54(1).

Fischer, A., S. Cellmer i K. Nowel (2023). "Assessment of the double-parameter iterative Tikhonov regularization for single-epoch measurement model-based precise GNSS positioning". W: *Measurement* 218(113251). DOI: 10.1016/j.measurement.2023.113251.

Fischer, A., S. Cellmer i K. Nowel (2024). "The Modified Ambiguity Function Approach with regularization for instantaneous precise GNSS positioning". W: *Journal of Applied Geodesy*. DOI: 10.1515/jag-2024-0007.

Fischer, A., K. Nowel i S. Cellmer (2025). "The statistical testing of regularized mathematical models in geodetic data processing". W: *Journal of Geodesy* 99:14. DOI: 10.1007/s00190-025-01934-w.

Goad, C. (1998). *GPS for Geodesy (11. Short Distance GPS Models)*. Springer: Berlin.

Golub, G.H., M. Heath i G. Wahba (1979). "Generalized cross-validation as a method for choosing a good ridge parameter". W: *Technometrics* 21, s. 215–223.

Gui, Q.M. i S.H. Han (2007). "New Algorithm of GPS Rapid Positioning Based on Double-$k$-type Ridge Estimation". W: *Journal of Surveying Engineering* 133(173), s. 4.

Hadamard, J. (1932). *Lecture on Cauchy's problem in linear partial differential equations*. Yale University Press: New York.

Hansen, P.C. (1990). "Truncated singular value decomposition solutions to discrete ill-posed problems with ill-determined numerical rank". W: *SIAM journal on scientific computing* 11, s. 503–518.

Hansen, P.C. (1992). "Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve". W: *SIAM Review* 34, s. 561–580.

Hansen, P.C. i D.P. O'Leary (1993). "The use of the L-curve in the regularization of discrete ill-posed problems". W: *SIAM journal on scientific computing* 14(6), s. 1487–1503.

Hemmerle, W.J. (1975). "An explicit solution for generalized ridge regression". W: *Technometrics* 17, s. 309–314.

Hemmerle, W.J. i T.F. Brantle (1978). "Explicit and constrained generalized ridge estimation". W: *Technometrics* 20, s. 109–120.

Hoerl, E. i R.W. Kennard (1970). "Ridge regression: Biased estimation for nonorthogonal problems". W: *Technometrics* 12, s. 55–67.

Hofmann-Wellenhof, B., H. Lichtenegger i E. Wasle (2008). *GNSS - Global Navigation Satellite Systems*. Springer: Wien, New York.

Ji, K., Y. Shen, Q. Chen, B. Li i W. Wang (2022). "An adaptive regularized solution to inverse ill-posed models". W: *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 60(4209715). DOI: 10.1109/TGRS.2022.3205572.

Khodabandeh, A. i P.J.G. Teunissen (2024). "Bias-constrained integer least squares estimation: distributional properties and applications in GNSS ambiguity resolution". W: *Journal of Geodesy* 98:40. DOI: 10.1007/s00190-024-01851-4.

Koch, K.R. (1999). *Parameter Estimation and Hypothesis Testing in Linear Models*. Springer-Verlag: Berlin.

Koch, K.R. i J. Kusche (2002). "Regularization of geopotential determination from satellite data by variance compontens". W: *Journal of Geodesy* 76, s. 259–268.

Kusche, J. i R. Klees (2002). "Regularization of gravity field estimation from stallite gravity gradients". W: *Journal of Geodesy* 76, s. 359–368.

Lawless, J.F. i P. Wang (1976). "A simulation study of ridge and other regression estimators". W: *Commun. Statist. Theor. Meth.* A5:307-323.

Lehmann, R. (2013). "On the formulation of the alternative hypothesis for geodetic outlier detection". W: *Journal of Geodesy* 87, s. 373–386. DOI: 10.1007/s00190-012-0569-0.

Lehmann, R. i M. Lösler (2016). "Multiple Outlier Detection: Hypothesis Tests versus Model Selection by Information Criteria". W: *Journal of Surveying Engineering* 142(4). DOI: doi.org/10.1061/(ASCE)SU.1943-5428.0000189.

Leick, A., L. Rapoport i Tatarnikov D. (2015). *GPS Satellite Surveying, Fourth Edition*. Wiley: Hoboken, New Jersey.

Li, B. (2009). "Extended GNSS Ambiguity Resolution Models with Regularization Criterion and Constraints". W: *Journal of Global Positioning Systems* 8(2), s. 148–153. DOI: 10.5081/jgps.8.2.148.

Li, B., Y. Shen i Y. Feng (2010). "Fast GNSS ambiguity resolution as an ill-posed problem". W: *Journal of Geodesy* 84, s. 683–698. DOI: 10.1007/s00190-010-0403-5.

Li, B., M. Wang i Y. Shen (2021). "The hypothesis testing statistics in linear ill-posed models". W: *Journal of Geodesy* 95, s. 1–19. DOI: 10.1007/s00190-020-01465-6.

Luo, X., J. Ou, Y. Yuan, J. Gao, X. Jin, K. Zhang i H. Xu (2008). "An improved regularization method for estimating near real-time systematic errors suitable for medium-long GPS baseline solutions". W: *Earth Planets Space* 60, s. 793–800.

Massawareh, L., S. Verhagen i P.J.G. Teunissen (2025). "New LAMBDA toolbox for mixed-integer models: estimation and evaluation". W: *GPS Solutions* 29:14. DOI: 10.1007/s10291-024-01738-z.

Moritz, H. (1980). *Advanced physical geodesy*. Herbert Wichmann Verlag: Karlsruhe.

Nowel, K., S. Cellmer i A. Fischer (2020). "Validation of GNSS baseline observation models using information criteria". W: *Survey Review* 53(380). DOI: 10.1080/00396265.2020.1790168.

Nowel, K., S. Cellmer i D. Kwaśniak (2018). "Mixed integer–real least squares estimation for precise GNSS positioning using a modified ambiguity function approach". W: *GPS Solutions* 22:31. DOI: 10.1007/s10291-017-0694-6.

Odijk, D. (2017). *GNSS - Global Navigation Satellite Systems (21. Positioning Model)*. Springer: Cham, Switzerland.

Prószyński, W. i M. Kwaśniak (2002). *Niezawodności sieci goedezyjnych*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej: Warszawa.

El-Rabbany, A. (2002). *Introduction to GPS: The Global Positioning System*. Artech House: Norwood.

Rummel, R., K.P. Schwarz i M. Gerstl (1979). "Least squares collocation and regularization". W: *Bull. Geod.* 53, s. 343–361.

Shen, Y. i B. Li (2007). "Regularized Solution to Fast GPS Ambiguity Resolution". W: *Journal of Surveying Engineering* 133:4(168).

Shen, Y., P. Xu i B. Li (2012). "Bias-corrected regularized solution to inverse ill-posed models". W: *Journal of Geodesy* 86, s. 597–608.

Strang, G. (2016). *Introduction to Linear Algebra*. Cambridge Press: Wellesley.

Teunissen, P.J.G. (1995). "The least-squares ambiguity decorrelation adjustment: a method for fast GPS integer ambiguity estimation". W: *Journal of Geodesy* 70, s. 65–82.

Teunissen, P.J.G. (1998). "On the integer normal distribution of the GPS ambiguities". W: *Artif. Satell.* 33(2), s. 49–64.

Teunissen, P.J.G. (1999). "An optimality property of the integer least-squares estimator". W: *Journal of Geodesy* 73(11), s. 587–593.

Teunissen, P.J.G. (2001). "Integer Estimation in the Presence of Biases". W: *Journal of Geodesy* 75, s. 399–407. DOI: 10.1007/s001900100191.

Teunissen, P.J.G. (2006a). *Adjustment theory*. VSSD: Delft.

Teunissen, P.J.G. (2006b). *Testing theory*. VSSD: Delft.

Teunissen, P.J.G. (2017). *GNSS - Global Navigation Satellite Systems (23. Carrier Phase Integer Ambiguity Resolution)*. Springer: Cham, Switzerland.

Teunissen, P.J.G. (2018). "Distributional theory for the DIA method". W: *Journal of Geodesy* 92, s. 59–80. DOI: 10.1007/s00190-017-1045-7.

Teunissen, P.J.G. (2024a). "On the optimality of DIA-estimators: theory and applications". W: *Journal of Geodesy* 98(43). DOI: 10.1007/s00190-024-01859-w.

Teunissen, P.J.G. (2024b). "The ambiguity-resolved detector: a detector for the mixed-integer GNSS model". W: *Journal of Geodesy* 98:83. DOI: 10.1007/s00190-024-01885-8.

Tienstra, J. (1956). *Theory of the adjustment of normally distributed observation*. Argus: Amsterdam.

Tikhonov, A.N. (1963a). "Regularization of ill-posed problems". W: *Doklady Akademii Nauk SSSR* 151, s. 49–52.

Tikhonov, A.N. (1963b). "Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method". W: *Doklady Akademii Nauk SSSR* 151, s. 501–504.

Tikhonov, A.N. i V. Arsenin (1977). *Solutions of ill-posed problems*. Wiley: New York.

Tikhonov, A.N., V. Goncharsky, V. Steppanov i A. Yagola (1995). *Numerical methods for the solution of ill-posed problems*. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht.

Verhagen, A.A. (2005). *The GNSS integer ambiguities: estimation and validation*. TU Delft: Delft.

Verhagen, S., B. Li i P.J.G. Teunissen (2013). "Ps-LAMBDA: Ambiguitysuccessrateevaluationsoftware for interferometricapplications". W: *Computers Geosciences* 54, s. 361–376. DOI: 10.1016/j.cageo.2013.01.014.

Wang, Z. (2012). "Multi-parameter Tikhonov regularization and model function approach to the damped Morozov principle for choosing regularization parameters". W: *J. Comput. Appl. Math.* 236, s. 1815–1832. DOI: 10.1016/j.cam.2011.10.014.

Wasserman, L. (2004). *All of Statistics*. Springer: New York.

Wilkinson, J.H. (1965). *The algebraic eigenvalue problem*. Clarendon Press: Oxford.

Wiśniewski, Z. (2016). *Rachunek Wyrównawczy w Geodezji (z przykładami)*. Wydawnictwo Uniwersytetu Warmińsko-Mazurskiego w Olsztynie: Olsztyn.

Wu, z. i S. Bian (2022). "Regularized integer least-squares estimation: Tikhonov's regularization in a weak GNSS model". W: *Journal of Geodesy* 96:22. DOI: 10.1007/s00190-021-01585-7.

Xu, G. (2007). *GPS Theory, Algorithms and Applications*. Springer: Berlin.

Xu, P. (1998). "Truncated SVD methods for discrete linear ill-posed problems". W: *Geophys. J. Int.* 135, s. 505–514.

Xu, P. (2001). "Random simulation and GPS decorrelation". W: *Journal of Geodesy* 75, s. 408–423.

Xu, P. (2006). "Voronoi cells, probabilistic bounds, and hypothesis testing in mixed integer linear models". W: *IEEE Trans. Inform. Theory* 52(7), s. 3122–3138.

Xu, P. (2009). "Iterative generalized cross-validation for fusing heteroscedastic data of inverse ill-posed problems". W: *Geophys. J. Int.* 179, s. 182–200.

Xu, P., Y. Fukuda i Y. Liu (2006a). "Multiple parameter regularization: numerical solutions and applications to the determination of geopotential from precise satellite orbits". W: *Journal of Geodesy* 80, s. 17–27. DOI: 10.1007/s00190-006-0025-0.

Xu, P. i R. Rummel (1994). "A simulation study of smoothness methods in recovery of regional gravity fields". W: *Geophys. J. Int.* 117, s. 472–486.

Xu, P., Y. Shen, Y. Fukuda i Y. Liu (2006b). "Variance component estimation in linear inverse ill-posed models". W: *Journal of Geodesy* 80(2), s. 69–81. DOI: 10.1007/s00190-006-0032-1.

Yin, C., P.J.G. Teunissen i C.C.J.M. Tiberius (2025). "Performance of ambiguity-resolved detector for GNSS mixed-integer model". W: *GPS Solutions* 29:76. DOI: 10.1007/s10291-024-01806-4.

Yu, Y., L. Yang, Y. Shen, W. Wang, B. Li i Q. Chen (2024). "An iterative and shrinking generalized ridge regression for ill-conditioned geodetic observation equations". W: *Journal of Geodesy* 98(3). DOI: 10.1007/s00190-023-01795-1.

Zaminpardaz, S. i P.J.G. Teunissen (2019). "DIA-datasnooping and identifiability". W: *Journal of Geodesy* 93, s. 85–101. DOI: 10.1007/s00190-018-1141-3.

Zaminpardaz, S. i P.J.G. Teunissen (2023). *Encyclopedia of Geodesy (GNSS Detection and Estimation Integrity)*. Springer: Switzerland.

# Spis rysunków

1 Geometryczna interpretacja regularyzowanej estymacji. . . . . 15
2 Obszary przyciągania estymatora całkowitoliczbowego MNK w kolorze czarnym oraz regularyzowanego w kolorze błękitnym. Czerwone kropki to rozwiązania rzeczywistoliczbowe MNK, które nie zapewniają poprawnego rozwiązania całkowitoliczbowego, ponieważ $\hat{\mathbf{a}} \notin \mathcal{S}_a$. Niebieskie kropki to regularyzowane rozwiązania rzeczywistoliczbowe, które również nie zapewniają poprawnego rozwiązania całkowitoliczbowego, ponieważ $\hat{\mathbf{a}}_k \notin \mathcal{S}_{a_k}$. Zielone kropki to natomiast rozwiązania rzeczywistoliczbowe, które zapewniają poprawne rozwiązanie całkowitoliczbowe, ponieważ $\hat{\mathbf{a}} \in \mathcal{S}_a$ oraz $\hat{\mathbf{a}}_k \in \mathcal{S}_{a_k}$ (na podstawie Fischer i in. (2023, Rys. 3)). . . . . 18
3 Jednoczesne wyznaczenie dwóch różnych parametrów regularyzacji w oparciu o minimalizację śladu $\mathbf{MSE}_{\hat{x}_k\hat{x}_k}$. Czarna strzałka wskazuje punkt, w którym został osiągnięty minimalny ślad $\mathbf{MSE}_{\hat{x}_k\hat{x}_k}$ (na podstawie Fischer i in. (2023, Rys. 2)). . 23
4 Funkcja gęstości rzeczywistoliczbowych nieoznaczoności pomiaru fazowego: a) estymator MNK, b) regularyzowany estymator (na podstawie Fischer i in. (2023, Rys. 4)). . . . . 24
5 Średnia częstość akceptacji poprawnego rozwiązania całkowitoliczbowych nieoznaczoności pomiaru fazowego jako funkcji PDOP (na podstawie Fischer i in. (2023, Rys. 14)). . . . . 26
6 Przykład komórki Woronoja rozwiązania globalnego całkowitoliczbowych nieoznaczoności pomiaru fazowego, które są poprawne, oraz odpowiadającego obszaru przyciągania (na podstawie Fischer i in. (2024, Rys. 5)). . . . . 30
7 Obszary poszukiwań metody MAFA-ILS w kształcie elipsoidy błędu $\underline{\hat{\mathbf{x}}}_{r_j}$: a) $j \neq k$, $\alpha = 0.001$, b) $j \neq k$, $\alpha = 0.1$, c) $j = k$, $\alpha = 0.001$, d) $j = k$, $\alpha = 0.1$. Obszary poszukiwań są w kolorze siwym, $\mathcal{S}_{x(a)}$ oraz $\mathcal{V}_{x(a)}$ rozwiązania globalnego, które jest poprawne, są odpowiednio w kolorze zielonym oraz kolorze czarnym (na podstawie Fischer i in. (2024, Rys. 10)). . . . . 36
8 Poziom redukcji liczby kandydatów w procedurze poszukiwania metody MAFA-ILS w przypadku zastosowania regularyzowanego obszaru poszukiwań. Redukcja liczby kandydatów jest analizowana w zależności od wielkości nominalnej precyzji pomiaru fazy fali nośnej oraz liczby satelitów w geometrycznej konstrukcji pozycjonowania: a) $\sigma_\Phi = 0.01$ cyklu, b) $\sigma_\Phi = 0.02$ cyklu, c) $\sigma_\Phi = 0.03$ cyklu (Fischer i in. (2024, Rys. 16)). . . . . 37
9 Granice prawdopodobieństwa poprawnej estymacji całkowitoliczbowej: a) górna granica (GG), b) dolna granica (DG), c) odległość rozwiązania precyzyjnej pozycji odbiornika od pozycji prawdziwej (na podstawie Fischer i in. (2024, Rys. 19)). . . 39
10 Funkcja wiarygodności danej realizacji $y = 0.5$ jako funkcja $x$ z realizacją estymatora MNK [kolor niebieski], realizacją regularyzowanego estymatora [kolor czerwony] oraz realizacją regularyzowanego estymatora skorygowanego o obciążenie [kolor czarny] (na podstawie Fischer i in. (2025, Rys. 1)). . . . . 43
11 Geometryczna interpretacja eliminacji obciążenia wynikającego z zastosowania regularyzacji (na podstawie Fischer i in. (2025, Rys. 2)). . . . . 48

12 Rozkłady prawdopodobieństwa statystyk testu globalnego modelu $\mathcal{H}_0$ w oparciu o funkcje gęstości: teoretyczne [linia przerywana] oraz właściwe [linia ciągła] (na podstawie Fischer i in. (2025, Rys. 3)). . . . . 51

13 Podział przestrzeni niezamknięć w ramach procedury testowania DIA wykorzystując: a) regularyzowane statystyki testowe, b) regularyzowane statystyki testowe skorygowane o obciążenie, c) statystyki testowe sformułowane na podstawie niezamknięć. Scenariusze dotyczące postaci modelu obserwacji w pozycjonowaniu absolutnym są oznaczone kolejno przez 1), 2) oraz 3). (na podstawie Fischer i in. (2025, Rys. 5)). . . . . 52